

Изабрани проблеми и експерименти из Радијационе физике

Драгана Ж. Крстић и Владимир М. Марковић

Крагујевац
2019. година

ПРЕДГОВОР

Главни мотив за писање ове књиге била је жеља да се обједине проблемски задаци и експерименти који су годинама настајали из предавања студентима Природно-математичког факултета на предмету Радијациона физика. Идеја је да се за сваку од области која се обрађује представи уводни текст, који се односи на најважније физичке законе и одговарајуће физичке величине, у циљу помоћи студентима при решавању конкретних проблема и задатака. Обим градива изложен у овој књизи у неким сегментима превазилази оно што би студенти требало да савладају у предмету Радијациона физика, тако да књигу могу користити и студенти докторских студија у оквиру предмета Виши курс радијационе физике и Дозиметрија и радиоекологија.

У оквиру овог уџбеника у првом делу су обухваћени проблеми и рачунски задаци, а други део чине изабрани експерименти, који представљају лабораторијске вежбе за студенте.

Аутори се захваљују свим професорима и колегама који су учествовали у досадашњем извођењу наставе на предмету Радијациона физика и својим залагањем допринели континуираном унапређењу ове научне области.

Посебну захвалност за несебичну подршку, љубазне савете током писања овог уџбеника, низ корисних препорука приликом структурирања књиге, аутори дугују рецензенту, професору др Драгославу Никезићу, руководиоцу Лабораторије за радијациону физику, која се налази у оквиру Института за физику Природно-математичког факултета у Крагујевцу. Формирање лабораторије је почело још 1978. године, доласком професора Петра Марковића из Института за Нуклеарне Науке Винча.

Аутори такође изузетну захвалност дугују и рецензенту, професору и научном саветнику, др. Оливери Цирај-Бјелац на корисним сугестијама и помоћи у концептирању садржаја књиге и помоћи у избору литературе.

Хвала студентима мастер студија физике, генерације 2018/2019., на корисним сугестијама и указивању на поједине пропусте, омашке и грешке, као и посвећености у детаљном решавању проблема.

На крају, захваљујемо се нашим породицама на стрпљењу и разумевању које су нам пружиле током процеса настанка ове књиге.

У Крагујевцу, 2019.

А У Т О Р И

САДРЖАЈ

УВОД	1
1 РАДИОАКТИВНОСТ	3
2 ДОЗИМЕТРИЈА	29
2.1 ВЕЛИЧИНЕ У ДОЗИМЕТРИЈИ И ЗАШТИТИ ОД ЗРАЧЕЊА	30
2.2 ФИЗИЧКЕ ВЕЛИЧИНЕ	31
2.3 ЗАШТИТНЕ ВЕЛИЧИНЕ	32
2.4 ОПЕРАТИВНЕ ВЕЛИЧИНЕ У ЗАШТИТИ ОД ЗРАЧЕЊА	35
2.5 ГУСТИНА ФЛУКСА ОД ТАЧКАСТИХ И ПРОДУЖЕНИХ ИЗВОРА	36
2.6 ЕКСПОЗИЦИОНА ДОЗА	64
3 АПСОРПЦИЈА ЗРАЧЕЊА	71
4 ДЕТЕКЦИЈА ЗРАЧЕЊА И СТАТИСТИКА	83
4.1 ГЕОМЕТРИЈСКА ЕФИКАСНОСТ ДЕТЕКЦИЈЕ	85
4.2 СТАТИСТИКА РАДИОАКТИВНОГ РАСПАДА	96
5 ЛАБОРАТОРИЈСКЕ ВЕЖБЕ	123
5.1 ЗАВИСНОСТ ЕКСПОЗИЦИОНЕ ДОЗЕ ОД РАСТОЈАЊА	123
5.2 КАЛИБРАЦИЈА ГМ БРОЈАЧА НА ЈАЧИНУ ЕКСПОЗИЦИОНЕ ДОЗЕ 126	
5.3 ГАМА СПРЕКТРОМЕТРИЈСКА АНАЛИЗА	128
5.4 ОДРЕЂИВАЊЕ УКУПНЕ БЕТА АКТИВНОСТИ УЗОРАКА ИЗ ЖИВОТНЕ СРЕДИНЕ	133
5.5 МЕРЕЊЕ КОНЦЕНТРАЦИЈА РАДОНА И ТОРОНА У ВАЗДУХУ ВОДИ И ЗЕМЉИШТУ	142
6 ДОДАТАК	149
6.1 МЕТОДА НАЈМАЊИХ КВАДРАТА	149
7 ЛИТЕРАТУРА	153

УВОД

Радијациона физика представља значајну област примењене физике, која се бави пручавањем широког обима појава повезаних са јонизујућим зрачењем. Под јонизујућим зрачењем се подразумева честично и електромагнетно зрачење, које има способност да изазове јонизацију атома и молекула материјалне средине кроз коју пролази. Историјски гледано, рендгенско зрачење, које представља електромагнетско јонизујуће зрачење, је откривено 1895. године од стране Вилхема Рентгена. Након тога, алфа и бета са пратећим гама зрачењем из природне радиоактивности, открио је Анри Бекерел 1896. године. Истраживања радиоактивних појава наставили су Пјер и Марија Кири, постављајући темељ развоју нуклеарне физике. На другој страни, истраживање рендгенског зрачења наставили су Томас А. Едисон и Михаило Пупин којима припадају први патенти примене овог зрачења у медицини. Даље истраживање из ове области наставили су Енрико Ферми, Ирена Жолио-Кири, Павле Савић и др. у покушају открића нових трансуранијских елемената коришћењем неутронског зрачења. Међутим откривено је да се језгро урана, које озрачено неутронима, цепа у два лакша фрагмента, што је процес фисије. Новодобијена језгра, фисиони производи, су врло радиоактивни и чине већинску радиоактивност (намерна трансмутација атомског језгра).

Најранија истраживања и примена зрачења су показала корисност у науци и медицини, али су установљени и штетни ефекти. Међутим, здравствена штетност јонизујућих зрачења није била чврсто установљена више од 20 година од њиховог открића. Није се знало да је јонизујуће штетно по здравље, мада је било одређених наговештаја у вези са тим. Тек средином 20-тих година прошлог века, установљена је јасна узрочно-последична веза између озрачивања и појаве леукемије. Појава је први пут примећена код радника који су радили у фабрикама сатова, где су скалачке и бројчаници бојени радиоактивним бојама помешаним са флуоресцентним материјалима, ради светљења у мраку. Дошло се до закључка да је потребно штитити се од непотребног и прекомерног излагања јонизујућем зрачењу, увођењем одговарајућих мера заштите. Прво је формирана Комисија са задацима да проучи постојеће податке о озрачивању људи и предложи одговарајуће мере заштите. Ова Комисија је касније прерасла у тзв. Међународну Комисију за заштиту од зрачења (ICRP- International Commission on Radiological Protection) која постоји и данас. ИЦРП проучава постојеће податке о дозама и ефектима зрачења, издаје одговарајуће препоруке које су уграђују у националну Регулативу у овој области. Поред ИЦРП постоје и друге међународне организације: Међународна агенција за атомску енергију (IAEA- International Atomic Agency), Међународно друштво за заштиту од зрачења (IRPA- International Radiation protection Association), Комитет Уједињених Нација за ефекте атомског зрачења (UNSCEAR- United Nations Scientific Committee on the Effects of Atomic Radiation), Међународна Комисија за радијационе јединице и мере (ICRU- International Commission on Radiation

Units and Measurements), и Национални Комитет за радијациону заштиту и мерења (*NCRP- National Council on Radiation Protection and Measurements*).

У оквиру овог рукописа у првом делу су обухваћени проблеми и задаци са решењима, а други део чине изабрани експерименти, који представљају лабораторијске вежбе за студенте.

Рукописом су обухваћене следеће тематске целине и области у Радијационој физици: радиоактивност, дозиметрија, апсорпција зрачења и детекција зрачења са статистиком. У уводном делу су јасно и концизно представљене теоријске основе које омогућавају лакше решавање задатака, као и одговарајућих проблема. Дате су формуле које се користе са детаљним објашњењем свих појмова и величина.

Прво поглавље обухвата радиоактивност, укључујући више проблема као што су прелазна равнотежа, изобарни ланац распада конкретних изотопа, пример једноставнијих биокинетичких модела компартмента и др. Друго поглавље представља широку област дозиметрије, која обухвата: (1) величине у дозиметрији и заштити од зрачења; (2) физичке величине; (3) заштитне величине; (4) оперативне величине у заштити од зрачења; (5) густину флукса од тачкастих и продужених извора и (6) експозициону дозу. Дефинисање величина у дозиметрији и заштити од зрачења засновано је на препорукама Међународне комисије за заштиту од зрачења (ICRP). Важно је истаћи да су приказане табеле у којима су дате вредности радијационих и ткивних тежинских фактора. У трећем поглављу обрађена је проблематика интеракције зрачења са материјом, односно апсорпције јонизујућих зрачења. Четврто поглавље обухвата детекцију јонизујућих зрачења са одговарајућим статистичким разматрањем. Приказана су три статистичка модела која описују радиоактивни распад: Поасонова, Биномна и Нормална расподела.

Други део рукописа представљају изабрани експерименти, тј. лабораторијске вежбе за студенте. У оквиру сваке вежбе, прво су дате теоријске основе, а затим одговарајући задаци и вежбања. Приказано је укупно 5 експеримената: (1) зависност експозиционе дозе од растојања; (2) калибрациона крива ГМ бројача на јачину експозиционе дозе; (3) гама спектрометријска анализа; (4) одређивање укупне бета активности непознатог узорка и (5) мерење концентрација радона и торона у ваздуху, води и земљишту. У додатку је детаљно обрађена проблематика анализе резултата експерименталних мерења методом најмањих квадрата.

Приложени рукопис одговара садржају предмета Радијациона физика који се предаје на Природно-математичком факултету, Универзитета у Крагујевцу.

1 РАДИОАКТИВНОСТ

Радиоактивност је процес спонтане трансмутације језгра уз емисију једне или више честица. Почетно језгро се назива „родитељ“, а новонастало језгро „потомак“. Језгро потомка може бити нестабилно, тако да се следећим распадима формира радиоактивни низ све до достизања стабилне конфигурације језгра. Пошто је радиоактивни распад језгра случајан процес, за карактерисање овог процеса примењују се појмови из теорије вероватноће. Вероватноћа радиоактивног распада у јединици времена је константа радиоактивног распада, λ , [s^{-1}]. Производ константе λ и интервала времена Δt даје вероватноћу распада у том интервалу времена.

Активност супстанце која садржи $N(t)$ радиоактивних атома дефинише се бројем распада у јединици времена и једнака је:

$$A(t) = \lambda \cdot N(t).$$

Јединица за активност је један распад у секунди и има посебан назив Бекерел $1 \text{ Bq} = 1 \text{ s}^{-1}$. Вансистемска јединица за активност, која је дуго била у употреби, а и данас се често среће по литератури, је Кири, ознака је Ci, при чему је $1 \text{ Ci} = 3.7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$. Поред константе радиоактивног распада, параметар који карактерише брзину распадања неког изотопа је период полураспада, T . Оно представља време за које се распадне половина укупног броја језгара и једнако је $T = \ln 2 / \lambda$.

Специфична масена активност, A_s , се дефинише као активност по јединици масе радиоактивне супстанце:

$$A_s = \frac{A}{m} = \frac{\ln 2 \cdot N_A}{Tm},$$

где је m маса узорка, а T период полураспада.

Промена броја језгара у јединици времена, изазвана распадом, је једнака активности:

$$A(t) = -\frac{dN(t)}{dt}.$$

Знак минус у претходној једначини урачунава чињеницу да се број радиоактивних атома увек смањује са временом на рачун радиоактивног распада.

Задатак 1.1

Полазећи од израза за промену броја језгара у јединици времена, извести закон радиоактивног распада. У почетном тренутку број радиоактивних језгара је N_0 .

- а) Извести везу између периода полураспада и константе радиоактивног распада која је дата у претходном тексту;
- б) одредити вероватноћу распада у интервалу времена од 0 до t ;
- в) одредити израз за средње време живота радионуклида.

Константу распада λ сматрати познатом.

Решење

Како је $A(t) = \lambda N(t)$ комбинујући са $A(t) = -\frac{dN(t)}{dt}$ добија се $\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$.

После раздвајања променљивих добија се $\frac{dN(t)}{N(t)} = -\lambda dt$. Интеграљењем ове диференцијалне једначине добија се израз $\ln N(t) = -\lambda t + C$, где је C константа интеграције, која се одређује на основу почетног услова, $t = 0$, $N(0) = N_0 \Rightarrow C = \ln N_0$. Заменом константе у претходну једначину добија се израз који представља закон радиоактивног распада,

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}.$$

Множењем леве и десне стране једначине са λ , добија се,

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t}.$$

Активност, као и број нераспаднутих атома, се смањује по експоненцијалном закону.

- а) Период полураспада, T може се добити из услова $N(T) = N_0 / 2$. Заменом у закон радиоактивног распада добија се, $\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T}$.

Сређивањем горње једначине добија се израз којим се може одредити период полураспада:

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda},$$

који представља везу између периода полураспада и константе радиоактивног распада.

б) Вероватноћа распада у интервалу времена од 0 до t је:

$$w = \frac{N_0 - N(t)}{N_0} = \frac{N_0 - N_0 e^{-\lambda t}}{N_0} = 1 - e^{-\lambda t}.$$

в) Средње време живота неког радионуклида може се наћи на следећи начин: у интервалу времена од t до $t + dt$ распадне се dN језгара. Средње време живота је:

$$\tau = \langle t \rangle = \frac{\int t dN}{\int dN} = \frac{-\int_0^{\infty} t \lambda N dt}{-\int_0^{\infty} \lambda N dt} = \frac{-\int_0^{\infty} t \lambda N_0 e^{-\lambda t} dt}{-\int_0^{\infty} \lambda N_0 e^{-\lambda t} dt} = \frac{N_0 t e^{-\lambda t} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} N_0 e^{-\lambda t} dt}{N_0 e^{-\lambda t} \Big|_0^{\infty}},$$

где се интеграл у бројиоцу решава методом парцијалне интеграције. Добија се:

$$\tau = \frac{-\frac{1}{\lambda} N_0}{-N_0} = \frac{1}{\lambda},$$

односно, средње време живота је реципрочна вредност константе радиоактивног распада.

Задатак 1.2

Размотрити радиоактивни распад низа $R \xrightarrow{\lambda_1} P \xrightarrow{\lambda_2} S$ који се завршава стабилним језгром S . Претпоставити да се у почетном тренутку налазило $N_1(t=0) = N_{10}$ језгара родитељског радионуклида R и $N_2(t=0) = N_{20}$ језгара потомка P .

Одредити:

- број језгара која су се распала, $N_1(t)$ и $N_2(t)$ у функцији од времена;
- активност потомка P , претпостављајући да је у почетном тренутку број језгара радионуклида потомка био једнак нули;
- у ком случају се може створити стање прелазне равнотеже, при чему је однос броја језгара ова два радионуклида константан. Чему је једнак овај однос?
- време када ће активност потомка бити максимална, ако је у почетном тренутку постојао само родитељски радионуклид, тј., када је $N_{20}(0) = 0$.
- Одредити максималну активност потомка и укупну максималну активност.

Решење:

а) Ово је случај тзв. сложеног сукцесивног распада и диференцијалне једначине које описују промену броја језгара родитељског радионуклида и потомка су:

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1 \text{ и}$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 .$$

Број језгара родитељског радионуклида R смањује се на рачун њиховог распада, а број језгара потомка P се смањује на рачун сопственог распада, а повећава се на рачун распада језгара родитеља R .

Решење прве једначине за дате почетне услове је идентично решењу у претходном задатку, $N_1(t) = N_{10} e^{-\lambda_1 t}$. Друга једначина се може записати у облику

$$\frac{dN_2}{dt} + \lambda_2 N_2 = \lambda_1 N_{10} e^{-\lambda_1 t} .$$

Ово је линеарна диференцијална једначина првог реда, типа:

$$y' + P(x) = Q(x)$$

Тражено решење је у облику:

$$y = e^{-\int p dx} \left[C + \int Q(x) e^{\int p dx} dx \right],$$

односно

$$N_2(t) = e^{-\int \lambda_2 dt} \left[C + \int \lambda_1 N_{10} e^{-\lambda_1 t} e^{\int \lambda_2 dt} dt \right]$$

$$N_2(t) = e^{-\lambda_2 t} \left[C + \lambda_1 N_{10} \cdot \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \right]$$

Опште решење је облика $N_2(t) = C e^{-\lambda_2 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} e^{-\lambda_1 t}$,

где се константа C одређује из почетних услова, $t = 0$, $N_2(0) = N_{20}$, одакле је

$$C = N_{20} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} .$$

Заменом константе C и преуређивањем израза добија се:

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) + N_{20} e^{-\lambda_2 t}.$$

б) Како је у почетном тренутку број језгара радионуклида потомка P био једнак нули, тј., $N_{20} = 0$ број распаднутих језгара N_2 износи

$N_2(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$. Множењем леве и десне стране са λ_2 и увођењем почетне активности родитељског радионуклида $A_{10} = \lambda_1 N_{10}$ добија се активност потомка у неком тренутку t , $A_2(t)$:

$$A_2(t) = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} A_{10} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}).$$

в) Да би однос броја језгара родитеља и потомка био константан $\frac{N_1}{N_2}$, N_1 и N_2

би требало да зависе од времена на исти начин:

$$N_1(t) = N_{10} e^{-\lambda_1 t},$$

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}).$$

То је могуће само ако је $e^{-\lambda_1 t} > e^{-\lambda_2 t}$, тј. $\lambda_1 < \lambda_2$,

односно да је период полураспада родитеља много веће од периода полураспада потомка:

$$T_1 > T_2.$$

Тада је:

$$N_1(t) = N_{10} e^{-\lambda_1 t},$$

$$N_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} e^{-\lambda_1 t}.$$

Израз за однос броја језгара родитеља и потомка је:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{N_{10} e^{-\lambda_1 t}}{\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} e^{-\lambda_1 t}} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1}, \text{ одакле је}$$

$$A_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} A_1.$$

У случају када је $\lambda_1 \ll \lambda_2$, важи посебан случај:

$$\frac{N_1}{N_2} \approx \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \text{ или } N_1\lambda_1 = N_2\lambda_2 \text{ или } A_2(t) = A_1(t).$$

Добија се да су у стању прелазне равнотеже активности једнаке. Тада је константа распада родитеља много мања од константа распада потомка, $\lambda_1 \ll \lambda_2$, односно $N_1 \gg N_2$. Овај вид прелазне равнотеже назива се секуларна равнотежа ($T_1 \gg T_2$), која представља специјални случај прелазне равнотеже, где је у општем случају $T_1 \approx T_2$.

г) Максимална активност потомка се налази одређивањем првог извода активности потомка по времену и изједначавањем са нулом:

$$\frac{dA_2(t)}{dt} = 0, \text{ тј. } -\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} = 0,$$

одакле је

$$t_{A_2 \max} = \frac{\ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

д) Заменом $t_{A_2 \max}$ у полазну једначину, добија се

$$A_{2 \max} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} A_{10} \left(e^{-\lambda_1 \frac{\ln\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)}{\lambda_2 - \lambda_1}} - e^{-\lambda_2 \frac{\ln\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)}{\lambda_2 - \lambda_1}} \right),$$

одакле се сређивањем долази до релације $A_{2 \max} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}} \cdot A_{10} \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)$.

Временски тренутак максимума укупне активности оба изотопа се може добити из услова $\frac{d[A_1(t) + A_2(t)]}{dt} = 0$. Диференцирањем израза добија се

идентитет $-\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (-\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}) = 0$ из кога следи да је

$t_{A_{\max}} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \ln\left(\frac{\lambda_2^2}{2\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1^2}\right)$. Заменом $t_{A_{\max}}$ у израз за укупну активност добија се да је:

$$A_{\max} = A_{10} \left(\frac{\lambda_2^2}{2\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1^2} \right)^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}} + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} A_{10} \left(\left(\frac{\lambda_2^2}{2\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1^2} \right)^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}} - \left(\frac{\lambda_2^2}{2\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1^2} \right)^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}} \right),$$

$$\text{тј. } A_{\max} = A_{10} \left(\frac{\lambda_2^2}{2\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1^2} \right)^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}} \left[1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(1 - \left(\frac{\lambda_2^2}{2\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1^2} \right)^{\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}} \right) \right].$$

Максимална активност износи:

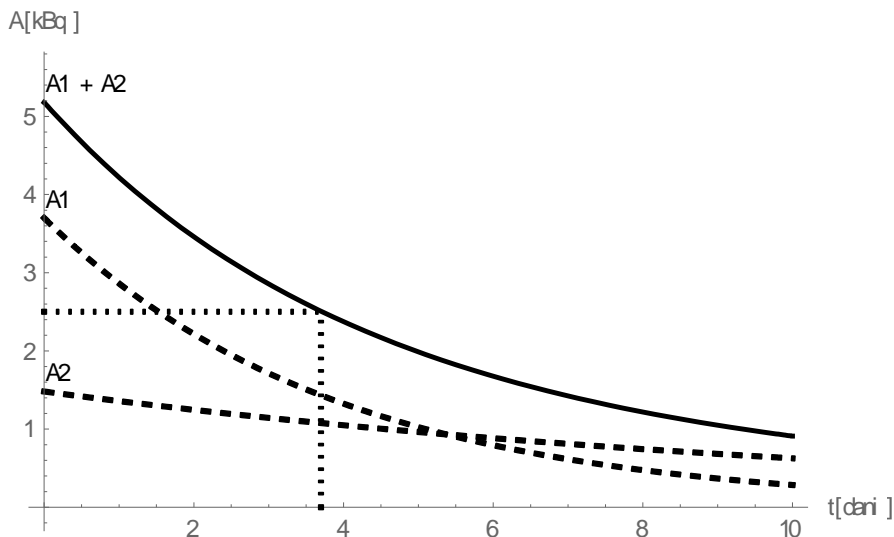
$$A_{\max} = A_{10} \frac{2\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2} \left(\frac{\lambda_2^2}{2\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1^2} \right)^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}}.$$

Задатак 1.3

Раствор садржи 3,7kBq ^{198}Au и 1,48kBq ^{131}I у почетном тренутку. Колика је укупна бета активност раствора после 21 дана? Када ће се укупна активност раствора смањити на половину почетне вредности? Оба изотопа су бета емитери и распадају се на стабилна језгра уколико се занемари мала фракција распада ^{131}I у $^{131\text{m}}\text{Xe}$ који не доприноси бета активности. Период полураспада ^{198}Au је 2,7 дана, а ^{131}I је 8,05 дана.

Решење:

После $t = 21\text{дан}$ активности ^{198}Au и ^{131}I ће бити $A_1 = A_{01}e^{-\lambda_1 t} \approx 1,68\text{kBq}$ и $A_2 = A_{02}e^{-\lambda_2 t} \approx 24,3\text{Bq}$. Укупна активност после времена t је збир појединачних активности и износи $A = A_1 + A_2 = 2,6\text{Bq}$. Време када укупна активност падне на половину од почетне активности се може одредити из једнакости $\frac{A_1 + A_2}{2} = A_{01}e^{-\lambda_1 t} + A_{02}e^{-\lambda_2 t}$. Ова једначина је трансцедентна и не може се решити по t . Решење се може потражити графички или итеративним методом смањења грешке. Слика 1.1. показује зависност ових активности од времена и њихов збир, одакле се може видети да укупна активност опадне на половину за око 4 дана.



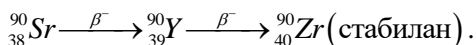
Слика 1.1 Слика уз решење задатка 1.1.

Задатак 1.4

Почевши са активношћу од 10 GBq узорка чистог ^{90}Sr у почетном тренутку колико ће времена бити потребно да укупна активност ($^{90}\text{Sr} + ^{90}\text{Y}$) достигне вредност од 17.5 GBq. ^{90}Sr је β^- емитер и распада са периодом полураспада од 29.12 година на ^{90}Y , који се такође β^- емитер и распада на стабилни ^{90}Zr са периодом полураспада од 64.04 сати. Користити чињеницу да за око 7 периода полураспада активност потомка постаје једнака активности родитеља.

Решење:

Ово је случај који илуструје распад дугоживећег радионуклида ($T_1 = 29,12$ година) на краткоживећи потомак ($T_2 = 64,04$ h), тј. $T_1 \gg T_2$:



Секуларна равнотежа се достиже за око седам времена полураспада потомка и износи $7 \cdot 64\text{h} = 448$ h. После овог времена активност ^{90}Sr се није приметно смањила, а активност ^{90}Y , A_2 , се повећала до вредности $A_1 = A_2 = 10$ GBq, тако да укупна активност износи 20 GBq. У овом задатку је потребно наћи време за које активност ^{90}Y достигне вредност 17.5 GBq. Ова активност ће се достићи за мање од 448 h, тако да се не може применити услов за секуларну равнотежу. На основу задатка 1.2 $A_2 = A_1(1 - e^{-\lambda_2 t}) + A_{20}e^{-\lambda_2 t}$. Како је $A_{20} = 0$, следи да је $A_2 = A_1(1 - e^{-\lambda_2 t})$, тј. одакле је $t = 128$ h.

Задатак 1.5

Природни уран представља смешу три изотопа ${}_{92}^{234}\text{U}$, ${}_{92}^{235}\text{U}$, ${}_{92}^{238}\text{U}$. Садржај урана ${}_{92}^{234}\text{U}$ је занемарљив (0,006%), део ${}_{92}^{235}\text{U}$ износи 0,72%, а осталу масу (99,28%) чини ${}_{92}^{238}\text{U}$. Периоди полураспада T_1 , T_2 и T_3 ових изотопа су $2,5 \cdot 10^5 \text{ god}$, $7,1 \cdot 10^8 \text{ god}$ и $4,49 \cdot 10^9 \text{ god}$, респективно. Наћи процентни удео радиоактивности сваког од ових изотопа у целокупној радиоактивности природног урана.

Решење:

Процентни удео радиоактивности изотопа у природном урану одређује се на основу односа активности сваког изотопа према укупној активности природног урана. Ако је m , маса природног урана, тада су масе одговарајућих изотопа једнаке $m_1 = 6 \cdot 10^{-5} \cdot m$, $m_2 = 7,1 \cdot 10^{-3} \cdot m$ и $m_3 = 0,9928 \cdot m$, респективно. Број распада у јединици времена појединих изотопа биће једнак:

$$\Delta N_1 = \frac{\ln 2}{T_1} N_1 \Delta t = \frac{\ln 2 N_A m_1 \Delta t}{T_1 A_{m1}}, \quad \Delta N_2 = \frac{\ln 2 N_A m_2 \Delta t}{T_2 A_{m2}} \quad \text{и} \quad \Delta N_3 = \frac{\ln 2 N_A m_3 \Delta t}{T_3 A_{m3}},$$

где је N_A -Авогадров број, M_i -моларна маса, $i = 1, 2, 3$.

Одавде је тражени процентни удео радиоактивности сваког од ових изотопа у целокупној радиоактивности природног урана:

$$x_i = \frac{\Delta N_i}{\Delta N_1 + \Delta N_2 + \Delta N_3} = \frac{m_i / (M_i T_i)}{m_1 / (M_1 T_1) + m_2 / (M_2 T_2) + m_3 / (M_3 T_3)}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$x_1 = \frac{m_1 / (M_1 T_1)}{m_1 / (M_1 T_1) + m_2 / (M_2 T_2) + m_3 / (M_3 T_3)},$$

$$x_1 = \frac{6 \cdot 10^{-5} / (234 \cdot 2,5 \cdot 10^5)}{6 \cdot 10^{-5} / (234 \cdot 2,5 \cdot 10^5) + 7,1 \cdot 10^{-3} / (235 \cdot 7,1 \cdot 10^8) + 0,9928 / (238 \cdot 4,49 \cdot 10^8)},$$

$$x_1 = \frac{0,01026 \cdot 10^{-10}}{0,01995 \cdot 10^{-10}} = 0,5142,$$

$$x_2 = \frac{m_2 / (M_2 T_2)}{m_1 / (M_1 T_1) + m_2 / (M_2 T_2) + m_3 / (M_3 T_3)},$$

$$x_2 = \frac{7,1 \cdot 10^{-3} / (235 \cdot 7,1 \cdot 10^8)}{6 \cdot 10^{-5} / (234 \cdot 2,5 \cdot 10^5) + 7,1 \cdot 10^{-3} / (235 \cdot 7,1 \cdot 10^8) + 0,9928 / (238 \cdot 4,49 \cdot 10^8)},$$

$$x_2 = 0,0213,$$

$$x_3 = \frac{m_3 / (M_3 T_3)}{m_1 / (M_1 T_1) + m_2 / (M_2 T_2) + m_3 / (M_3 T_3)},$$

$$x_3 = \frac{0,9928 / (238 \cdot 4,49 \cdot 10^8)}{6 \cdot 10^{-5} / (234 \cdot 2,5 \cdot 10^5) + 7,1 \cdot 10^{-3} / (235 \cdot 7,1 \cdot 10^8) + 0,9928 / (238 \cdot 4,49 \cdot 10^8)},$$

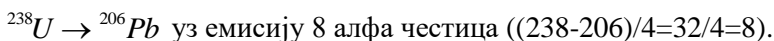
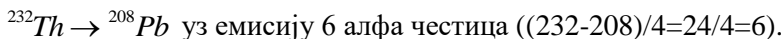
$$x_3 = 0,4645.$$

Од великог интереса за проучавање равнотеже између изотопа урана је однос активности ${}_{92}^{235}\text{U}$ према ${}_{92}^{238}\text{U}$, који износи 0,046, зато што се активност може измерити, за разлику од броја атома изотопа у руди.

Задатак 1.6

Израчунати старост руде која садржи 50% торијума, 30% урана и 8% олова, претпостављајући да је олово радиогене природе. Периоди полураспада ${}^{238}\text{U}$ и ${}^{232}\text{Th}$ су $4,49 \cdot 10^9$ година и $1,39 \cdot 10^{10}$ година, респективно. Израчунати, при нормалним условима, запремину гаса He из раствора од 100g ове руде, претпостављајући да у току времена гас остаје растворен у води. Користити вредност за моларну запремину гаса $V_m = 22,4 \text{ dm}^3/\text{mol}$ при нормалним условима (температура је 0°C и притисак $102,3 \text{ kPa}$).

Користити следеће претпоставке о броју емитованих алфа честица из шема распада за низове ${}^{232}\text{Th}$ и ${}^{238}\text{U}$:



Решење:

Обележавјући са m -масу руде, m_1 -масу торијума, m_2 -масу урана и m_3 -масу олова у руди, према поставци задатка је:

$$m_1 = 0,50m; m_2 = 0,30m; m_3 = 0,08m$$

Распадом ${}^{232}\text{Th}$ и његових потомака настаје ${}^{208}\text{Pb}$, док распадом ${}^{238}\text{U}$ и његових потомака настаје ${}^{206}\text{Pb}$, па је укупна маса олова у руди:

$$m_3 = m_3 ({}^{208}\text{Pb}) + m_3 ({}^{206}\text{Pb}).$$

Ако се тренутак формирања руде узме за почетни тренутак времена $t=0$, нека је број атома ^{232}Th је N_{10} , а N_1 је број атома ^{232}Th после истека времена t и λ_1 одговарајућа константа распада.

Према уведеним претпоставкама и ознакама (под условом да су периоди полураспада торијумових потомака занемарљиви у односу на период полураспада T_1 торијума) број атома изотопа ^{208}Pb је:

$$N_3(^{208}\text{Pb}) = N_{10} - N_1,$$

$$N_1 = N_{10}e^{-\lambda_1 t}, \text{ одавде је } N_{10} = N_1 e^{\lambda_1 t} \text{ и } N = \frac{m}{M} N_A.$$

Заменом у $N_3(^{208}\text{Pb})$ се добија

$$N_3(^{208}\text{Pb}) = N_1 e^{\lambda_1 t} - N_1 = N_1 (e^{\lambda_1 t} - 1), \text{ односно}$$

$$\frac{m_3(^{208}\text{Pb})}{208} = \frac{m_1(^{232}\text{Th})}{232} (e^{\lambda_1 t} - 1),$$

Одавде се добија маса олова:

$$m_3(^{208}\text{Pb}) = \frac{208}{232} m_1 (e^{\lambda_1 t} - 1).$$

Аналогно се добија за распад ^{238}U и ^{206}Pb :

$$N_3(^{206}\text{Pb}) = N_2 (e^{\lambda_2 t} - 1),$$

где је λ_2 -константа радиоактивног распада ^{238}U , одавде је маса олова:

$$m_3(^{206}\text{Pb}) = \frac{206}{238} m_2 (e^{\lambda_2 t} - 1),$$

$$m_3 = \frac{208}{232} m_1 (e^{\lambda_1 t} - 1) + \frac{206}{238} m_2 (e^{\lambda_2 t} - 1).$$

Како су периоди полурастада имају довољно велике вредности, вредност у експоненту λt је веома мала, па се $e^{\lambda t}$ може развити у ред и узети у обзир само прва два члана реда. Развој у ред $e^{\lambda t} \cong 1 + \lambda t$, омогућава решавање по времену:

$$m_3 = m_1 \frac{208}{232} \lambda_1 t + m_2 \frac{206}{238} \lambda_2 t = t \left(m_1 \frac{208}{232} \lambda_1 + m_2 \frac{206}{238} \lambda_2 \right),$$

$$t = \frac{m_3}{m_1 \frac{208}{232} \lambda_1 + m_2 \frac{206}{238} \lambda_2}.$$

Користећи везу између константе распада и периода полураспада, тј. $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$,

одговарајуће константе радиоактивног распада торијума и урана су:

$$\lambda_1 = \frac{\ln 2}{T_1} = \frac{0,693}{1,39 \cdot 10^{10} \text{ god}} \text{ и}$$

$$\lambda_2 = \frac{\ln 2}{T_2} = \frac{0,693}{4,49 \cdot 10^9 \text{ god}}.$$

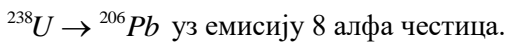
Старост руде је:

$$t = \frac{m_3}{m_1 \frac{208}{232} \lambda_1 + m_2 \frac{206}{238} \lambda_2},$$

$$t = \frac{0,08m}{0,50m \frac{208}{232} \frac{0,693}{1,39 \cdot 10^{10} \text{ god}} + 0,30m \frac{206}{238} \frac{0,693}{4,49 \cdot 10^9 \text{ god}}},$$

$$t = 1,28 \cdot 10^9 \text{ god}.$$

Број атома He који су настали за време t једнак је броју емитованих α -честица.



$$N(He) = 6N_3({}^{208}Pb) + 8N_3({}^{206}Pb) = 6N_1(e^{\lambda_1 t} - 1) + 8N_2(e^{\lambda_2 t} - 1).$$

Маса He из 100g руде је:

$$m(He) = 0,50m \frac{6 \cdot 4}{232} (e^{\lambda_1 t} - 1) + 0,30m \frac{8 \cdot 4}{238} (e^{\lambda_2 t} - 1) = 1,125g.$$

Користећи везу $\frac{m}{M} = \frac{V}{V_{mol}}$, израчунава се тражена запремина гаса хелијума при нормалним условима:

$$V = \frac{m}{M} V_{mol} = \frac{1,125}{4} \cdot 22,4L = 6,30L.$$

Задатак 1.7

Израчунати масу радиоактивног ^{89}Sr коју треба додати једном милиграму стабилног стронцијума да би масена специфична активност препарата била $5,06 \cdot 10^{16} \text{ Bq} \cdot \text{kg}^{-1}$? Период полураспада ^{89}Sr износи 50,57 дана.

Решење:

Нека је m_1 маса стабилног, а m_2 маса радиоактивног стронцијума. Специфична активност препарата је:

$$A_s = \frac{A}{m_1 + m_2} = \frac{\lambda N}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 \cdot N_A \cdot \ln 2}{T \cdot M (m_1 + m_2)},$$

одакле се добија да је маса радиоактивног ^{89}Sr :

$$m_2 = \frac{A_s \cdot T \cdot M \cdot m_1}{N_A \cdot \ln 2 - A_s \cdot T \cdot M} = 0,05 \text{ mg}.$$

Задатак 1.8

Израчунати специфичну активност ^{226}Ra у $\text{Bq} \cdot \text{g}^{-1}$. Период полураспада је $T \approx 1620 \text{ god}$.

Решење:

Специфична активност износи:

$$A_s = \frac{N_A \cdot \lambda}{M} = \frac{6,02 \cdot 10^{23} \cdot \lambda}{M} = \frac{4,17 \cdot 10^{23}}{MT},$$

где је N_A - Авогадров број, а M - је масени број; Ако је T у секундама, специфична активност се добија у јединицама $\text{Bq} \cdot \text{g}^{-1}$,

$$A_s = \frac{4,17 \cdot 10^{23}}{226 \text{ g} \cdot 1600 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s}} = 3,66 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1} \text{ g}^{-1} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Bq g}^{-1}.$$

Активност 1 g радијума је дуго времена служила као јединица активности, Кири, ознака је 1Ci.

Задатак 1.9

Узорак радона ^{222}Rn запремине 0,1 mL налази се на температури 27°C и притиску 2026,5 kPa. Колико је период полураспада радона, ако узорак у

једном дану емитује $8,12 \cdot 10^{17}$ α -честица? Универзална гасна константа је једнака $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Решење:

Једначина стања идеалног гласи $pV = nRT$, одакле је $n = \frac{pV}{RT}$. Како је

$N = N_0 e^{-\frac{\ln 2}{T}t}$ почетан број језгара износи $N_0 = n \cdot N_A$. После једног дана распаће се $\Delta N = N_0 - N = N_0 - N_0 e^{-\frac{\ln 2}{T}t}$ језгара, одакле је:

$$T = \frac{t \cdot \ln 2}{\ln\left(\frac{N_0}{N_0 - \Delta N}\right)} = 3,825 \text{ дана.}$$

Задатак 1.10

У нуклеарном реактору се производи нестабилан елемент при некој константној брзини стварања R (атома/s). Ако је T период полураспада, колико времена, израженог у јединицама T је потребно да се произведе 50% од равнотежне количине?

Решење:

Диференцијална једначина промене броја атома, ако је R брзина стварања нестабилног елемента, је:

$$\frac{dN}{dt} = R - \lambda N, \text{ односно}$$

$$\frac{dN}{dt} + \lambda N = R.$$

Решење ове диференцијалне једначине је сума једног хомогеног и партикуларног решења:

$$N_h = C e^{-\lambda t} \text{ и}$$

$$N_p = \frac{R}{\lambda}.$$

Тражено решење је у облику:

$$N(t) = C e^{-\lambda t} + \frac{R}{\lambda}.$$

Константа C се одређује из почетног услова $N(0)=0$, $C = -\frac{R}{\lambda}$.

Коначно решење диференцијалне једначине је:

$$N(t) = \frac{R}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}).$$

Равнотежна количина броја атома је $N(\infty) = \frac{R}{\lambda}$.

На основу услова задатка је $N = 0,5 \frac{R}{\lambda}$, добија се:

$$\frac{1}{2} \frac{R}{\lambda} = \frac{R}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}), \text{ одакле следи да је}$$

$$t = \frac{\ln 2}{\lambda} = T.$$

Задатак 1.11

Радиоизотоп антимион ^{124}Sb се формира константном брзином $R = 2 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$.

^{124}Sb је β^- радиоактиван са периодом полураспада 60 дана и прелази у ^{124}Te .

Одредити:

а) после колико времена ће од почетка стварања активност ^{124}Sb износити $37 \cdot 10^7 \text{ Bq}$;

б) масу ^{124}Te која се сакупи у извору за 180 дана.

Решење:

Број атома ^{124}Sb у тренутку t , на основу решења претходног задатка је:

$$N(t) = \frac{R}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}),$$

а одговарајућа активност је:

$$A = \lambda N = R(1 - e^{-\lambda t}).$$

Логаритмовањем израза:

$$e^{\lambda t} = \frac{R}{R - A},$$

добија се тражено време:

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{R}{R-A},$$

$$t = \frac{T}{\ln 2} \ln \frac{R}{R-A} = 17,7 \text{ dana}.$$

б) За одређивање масе атома ^{124}Te која се накупи за 180 дана потребно је израчунати број његових атома. Број атома ^{124}Te једнак је броју распаднутих атома ^{124}Sb у том временском интервалу (^{124}Te је стабилан).

Број распаднутих атома ^{124}Sb се добија када се од броја створених за време t одузме број постојећих у t :

$$N_{Te} = N_{\text{расп. } ^{124}\text{Sb}} = Rt - \frac{R}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) = \frac{R}{\lambda} (\lambda t + e^{-\lambda t} - 1)$$

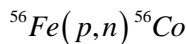
$$N_{Te} = 15,3 \cdot 10^{15} \text{ атома}.$$

Одговарајућа маса атома ^{124}Te је:

$$m_{Te} = \frac{M}{N_A} N_{Te} = 3,15 \mu\text{g}.$$

Задатак 1.12

При бомбардовању мете од гвожђа снопом протона, добија се радиоактивни кобалт. Вероватноћа нуклеарне реакције



износи $\omega = 1,2 \cdot 10^{-3}$ (под вероватноћом реакције подразумева се однос броја честица пз снопа које су ступиле у реакцију и броја честица које су пале на јединицу површине у јединици времена). Израчунати активност мете после 3,5h од почетка бомбардовања, ако је јачина струје протона $I = 3 \mu\text{A}$. Период полураспада кобалта је 77,2 дана.

Решење

Број нуклеарних реакција у јединици времена је: $R = \omega \cdot I_0 = \omega \frac{I}{e}$, где је ω вероватноћа реакције, I је јачина струје протона, а e наелектрисање протона. У току временског интервала dt формира се R језгара кобалта, али се и распадне λN језгара:

$$dN = I \cdot dt - \lambda N \cdot dt$$

На основу решења задатка 1.6, добија се:

$$N(t) = \frac{R}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) = \omega \frac{I}{\lambda e} (1 - e^{-\lambda t}).$$

Активност мете је:

$$A = \lambda N = R(1 - e^{-\lambda t}) = \omega \frac{I}{e} (1 - e^{-\lambda t}).$$

Како је време много мање од периода полураспада, $e^{-\lambda t}$ се развија у ред, па је

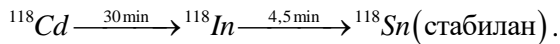
$$e^{-\lambda t} \cong 1 - \lambda t.$$

За активност мете се добија:

$$A = \omega \frac{I}{e} \lambda t = \omega \frac{I \ln 2}{e T} t = 29,42 \text{ MBq}.$$

Задатак 1.13

Дат је изобарни ланац распада изотопа ^{118}Cd :



На стрелицама су приказане вредности одговарајућих периода полураспада. Под претпоставком да је препарат у почетном тренутку садржао само кадмијум масе 0,1g, одредити масу стабилног изотопа калаја после 1h.

Решење:

Диференцијалне једначине које описују промену броја језгара родитељског радионуклида и потомка су:

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1 \text{ и}$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2.$$

На основу решења у задатку 1.2. добија се :

$$N_1(t) = N_{10} e^{-\lambda_1 t},$$

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}).$$

Брзина формирања стабилног изотопа ^{118}Sn једнака је брзини којом се распада ^{118}In :

$$\frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2.$$

Решење је :

$$N_3 = \int_0^{\tau} \lambda_2 N_2(t) dt.$$

Заменом $N_2(t)$ се добија број атома изотопа ^{118}Sn :

$$N_3 = \int_0^{\tau} \lambda_2 N_2(t) dt = \int_0^{\tau} \lambda_2 N_{10} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) dt,$$

$$N_3 = \int_0^{\tau} \lambda_2 N_2(t) dt = \int_0^{\tau} \lambda_2 N_{10} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) dt = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} \int_0^{\tau} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) dt,$$

$$N_3 = \frac{N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[\lambda_1 (e^{-\lambda_2 \tau} - 1) - \lambda_2 (e^{-\lambda_1 \tau} - 1) \right].$$

Маса стабилног изотопа добија се коришћењем следећих једнакости:

$$N_{10} = \frac{m_{10}}{M} N_A,$$

$$N_3 = \frac{m_3}{M} N_A,$$

$$m_3 = \frac{m_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[\lambda_1 (e^{-\lambda_2 \tau} - 1) - \lambda_2 (e^{-\lambda_1 \tau} - 1) \right],$$

$$m_3 \cong 10^{-5} \text{ kg}.$$

Задатак 1.14

Кинетичка енергија α - честице, коју емитује језгро атома полонијума $^{214}_{84}\text{Po}$ при радиоактивном распаду је, $E_K = 7,69 \text{ MeV}$. Маса мировала α - честице је $4,002603 \text{ ајм}$, при чему је $1 \text{ ајм} = 931,5 \text{ MeV}$. Одредити:

а) брзину α - честице;

б) укупну енергију W , ослобођену при α - распаду овог језгра;

в) број јонских парова N_{jp} , које α - честица ствара јонизацијом молекула ваздуха, претпостављајући да се за један јонски пар у ваздуху утроши енергија $W_0 = 34 \text{ eV}$;

г) струју засићења I_n , у јонизационој комори у којој је радни гас ваздух, од α - честица, које емитује полонијум. Активност полонијума је $A = 3,7 \cdot 10^4 \text{ Bq}$.

Решење:

Користи се релативистичка формула за укупну енергију алфа честице, која је једнака збиру кинетичке енергије и енергије мировања.

$$E = E_K + E_0.$$

Из теорије релативности је познато, да кинетичка енергија честице зависи од брзине њеног кретања на следећи начин:

$$E_K = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right),$$

где је $\beta = \frac{v}{c}$ релативна брзина α - честице.

а) Из формуле за кинетичку енергију добија се брзина α - честице:

$$\beta = \frac{\sqrt{E_K (E_K + 2m_0 c^2)}}{E_K + m_0 c^2},$$

$$v = \frac{c \sqrt{E_K (E_K + 2m_0 c^2)}}{E_K + m_0 c^2} \approx 2 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

На основу добијеног резултата, може се закључити да је α - честица дате енергије нерелативистичка честица.

б) Укупна енергија, која се емитује при емисији α - честице, једнака је збиру кинетичке енергије E_K , α - честице и кинетичке енергије E_{KJ} , узмака језгра:

$$W = E_K + E_{KJ}.$$

Примењује се закон одржања импулса, при чему је импулс система пре распада био једнак нули, а после распада, $m_0 v = M V$ при чему су уведене следеће ознаке: m_0 маса алфа честице, M маса језгра, v рзина алфа честице и V брзина језгра. Квадрирањем ове једначине и довођењем у везу са кинетичком енергијом узмакнутог језгра, добија се вредност за укупну енергију:

$$W = E_K + \frac{m_0}{M} E_K = E_K \left(1 + \frac{m_0}{M} \right) \approx 7,82 \text{ MeV}.$$

в) Број јонских парова које образује α - честица је једнак:

$$N_{jp} = \frac{W}{W_0} = \frac{7,82 \cdot 10^6 \text{ eV}}{34 \text{ eV}} = 2,3 \cdot 10^5$$

г) Струја засићења у јонизационој комори се добија у случају када је напон између електрода довољно велики да покупи створено наелектрисање од α -честица, које емитује полонијум:

$$I_n = AN_{jp} |e|.$$

Струја је протекло наелектрисање у јединици времена, где је e - елементарно наелектрисање.

Замењујући бројне вредности у израз за струју засићења се добија:

$$I_n = AN_{jp} |e| = 3,7 \cdot 10^4 \text{ Vq} \cdot 2,3 \cdot 10^5 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} = 13,63 \text{ A}.$$

Задатак 1.15

Мета сачињена од ^{31}P дебљине $d = 1 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}$ је у току 1 сата озрачена снопом неутрона флукса $\phi = 2 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$. Један сат после прекида озрачивања измерена је активност узорка и износила је $3,9 \cdot 10^6 \text{ Vq}$. Колики је ефикасни пресек реакције $^{31}\text{P}(n, p)^{31}\text{Si}$ ако је период полураспада силицијума $T = 157,3 \text{ min}$.

Решење:

Број језгара ^{31}Si , који се ствара у 1s у датој реакцији је:

$$N(t) = \sigma \cdot \phi \cdot n = \sigma \cdot \phi \cdot \frac{d \cdot N_A}{A},$$

где је n - број језгара у јединици површине мете, N_A - Авогадров број, A - масени број ^{31}Si . Број распаднутих језгара у 1s је $\lambda \cdot N(t)$, где је $\lambda = \ln 2/T = 0,264 \text{ h}^{-1}$, константа радиоактивног распада. Тада је одговарајућа диференцијална једначина, која описује овај процес:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \sigma \cdot \phi \cdot \frac{d \cdot N_A}{M} - \lambda N(t).$$

При почетном услову $N(0) = 0$ број насталих језгара ^{31}Si у тренутку времена t_1 :

$$N(t_1) = \sigma \cdot \phi \cdot \frac{d \cdot N_A}{M} (1 - e^{-\lambda t_1}).$$

После временског интервала t_2 од прекида озрачивања број језгара ^{31}Si је:

$$N(t_2) = N(t_1)e^{-\lambda t_2} = \sigma \cdot \phi \frac{d \cdot N_A}{\lambda \cdot M} (1 - e^{-\lambda t_1}) e^{-\lambda t_2}.$$

Одговарајућа активност је:

$$A(t_2) = \lambda \cdot N(t_2) = N(t_1)e^{-\lambda t_2} = \sigma \cdot \phi \frac{d \cdot N_A}{M} (1 - e^{-\lambda t_1}) e^{-\lambda t_2}.$$

Из ове једначине се добија ефикасни пресек реакције:

$$\sigma = \lambda \cdot N(t_2) = N(t_1)e^{-\lambda t_2} = \frac{A(t_2) \cdot M}{\phi \cdot d \cdot N_A (1 - e^{-\lambda t_1}) e^{-\lambda t_2}},$$

$$\sigma = \frac{3,9 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1} \cdot 31 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}}{2 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1} \cdot 1 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} (1 - e^{-0,264 \text{ h}^{-1} \cdot 4 \text{ h}}) e^{-0,264 \text{ h}^{-1} \cdot 1 \text{ h}}},$$

$$\sigma \cong 2 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^2 = 2 \cdot 10^{-30} \text{ m}^2.$$

Ако се користи јединица за ефикасни пресек barn, која је једнака $1 \text{ barn} = 10^{-24} \text{ cm}^2$, тада је $\sigma \cong 20 \text{ mbarn}$.

Задатак 1.16

а) Специфична активност изотопа угљеника ^{14}C дрвеног предмета, који је нађен у египатској пирамиди износи 130 Bq/kg . У живом дрвету специфична активност изотопа ^{14}C је 250 Bq/kg . Проценити старост дрвеног предмета.

б) Археолог је пронашао кост и претпоставио је да потиче од диносауруса. Део кости је послао на ^{14}C датирање. У лабораторији је добијен податак да та кост садржи 5 g угљеника и да има активност $0,5 \text{ Bq}$. Колико је стара кост и да ли би могла да припада диносаурусу?

Користити следеће податке: удео угљеника ^{14}C у укупној количини угљеника (^{12}C) је $1,3 \cdot 10^{-12}$, а период полураспада угљеника ^{14}C је 5730 година.

Решење

а) Нека је специфична активност предмета од дрвета, у тренутку кад је дрво исечено A_{s0} :

$$A_{s0} = \frac{A_0}{m} = \frac{\lambda N_0}{m},$$

где је A_0 почетна активност, N_0 број језгара ^{14}C , а m маса дрвета од кога је предмет направљен.

Специфична активност истог предмета сада је:

$$A_s = \frac{A}{m} = \frac{\lambda N}{m} = \frac{\lambda}{m} N_0 \cdot e^{-\lambda t}.$$

Из односа специфичних активности може се проценити старост дрвеног предмета:

$$\frac{A_0}{A_s} = e^{\lambda t},$$

$$t = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln \frac{A_0}{A_s} \cong 3500 \text{ god}.$$

б) Број нуклеона ^{12}C у 5 g угљеника је:

$$N(^{12}\text{C}) = \frac{m}{M} N_A = \frac{5 \text{ g}}{12 \frac{\text{g}}{\text{mol}}} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} = 2,51 \cdot 10^{23},$$

док је број нуклеона ^{14}C :

$$N(^{14}\text{C}) = N(^{12}\text{C}) \cdot 1,3 \cdot 10^{-12} = 2,51 \cdot 10^{23} \cdot 1,3 \cdot 10^{-12} = 3,26 \cdot 10^{11}$$

На основу почетног броја нуклеона ^{14}C , може се израчунати почетна активност:

$$A_0 = \lambda \cdot N_0 = \frac{\ln 2}{T} \cdot N_0 = \frac{0,693}{5730 \cdot 31,536 \cdot 10^6 \text{ s}} \cdot 3,26 \cdot 10^{11}$$

$$A_0 = \frac{0,693}{1,81 \cdot 10^{11} \text{ s}} \cdot 3,26 \cdot 10^{11} = 1,25 \text{ Bq}$$

Старост кости се може одредити на основу резултата претходног задатка, полазећи од релације за активност:

$$A = A_0 \cdot e^{-\lambda t},$$

одакле се добија израз за тражено време:

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{A_0}{A} = \frac{T}{\ln 2} \ln \frac{A_0}{A} = \frac{5730 \text{ god}}{0,693} \ln \frac{1,25 \text{ Bq}}{0,5 \text{ Bq}} \cong 7600 \text{ god},$$

одакле се може закључити да кост не припада диносаурусу.

Задатак 1.17

За испитивање функције крвотока користи се радиоактивни изотоп ^{24}Na . Његов физички период полураспада је $T = 15\text{h}$, а биолошки период полураспада је $T_b = 210\text{h}$. Израчунати вредности парцијалних константи λ и λ_b , као и ефективни период полураспада радиоизотопа ^{24}Na при овом процесу.

Решење

У људском организму физички период полураспада T не пружа довољно информација о динамици физиолошких процеса. Због тога је уведен и биолошки период полураспада T_b . Назива се још и период полуизлучивања. Како су ова два процеса независна, одговарајуће вероватноће се сабирају:

$$\lambda_{\text{eff}} = \lambda + \lambda_b.$$

Одговарајуће парцијалне константе распада су:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = 0,0462\text{h}^{-1}, \quad \lambda_b = \frac{\ln 2}{T_b} = 3,3 \cdot 10^{-3}\text{h}^{-1},$$

односно ефективни период полураспада:

$$T_{\text{eff}} = \frac{TT_b}{T + T_b} = 14\text{h}.$$

Задатак 1.18

Пацијенту је апликован радиоактивни ^{24}Na чија је активност $2,5\text{kBq}$. После 5h измерена активност 1cm^3 крви је износила $0,33\text{Bq}$. Одредити запремину крви пацијента, ако период полураспада ^{24}Na износи $T = 15\text{h}$.

Решење

Под претпоставком да је целокупни радиоактивни ^{24}Na само у крви, може се наћи активност укупне запремине крви пацијента V_2 после 5h .

Почетна специфична активност крви је:

$$A_{s0} = \frac{\lambda N_0}{V_1}.$$

После 5h од апликације радиоактивности, специфична активност крви је:

$$A_s = \frac{\lambda N}{V_2} = \frac{\lambda N_0 e^{-\lambda t}}{V_2}.$$

Запремина крви пацијента V_2 одређује се из количника почетне активности и активности након 5h :

$$\frac{A_s}{A_{s0}} = \frac{\frac{\lambda N_0 e^{-\lambda t}}{V_2}}{\frac{\lambda N_0}{V_1}} = \frac{V_1 \cdot e^{-\lambda t}}{V_2},$$

$$V_2 = \frac{V_1 A_{s0} e^{-\lambda t}}{A_s} = 5,96 \cdot 10^3 \text{ cm}^3 = 5,96 \text{ dm}^3 = 5,96 \text{ l}.$$

Задатак 1.19

Помоћу радиоизотопа ^{131}I , методом скинтиграфије, одређује се активност штитасте жлезде. Нека је апликована активност терапијске дозе $A_0 = 9,24 \cdot 10^8 \text{ Bq}$, која се акумулира у штитастој жлезди. За радиоизотоп ^{131}I штитаста жлезда је тзв. критични орган. Физички период полураспада јода је $T = 8 \text{ dana}$, а биолошки $T_b = 64 \text{ dana}$. За које време t_x ће се активност унетог ^{131}I смањити на петину своје почетне вредности? Користити резултат задатка 1.17.

Решење

Ефективни период полураспада за изотоп у штитастој жлезди износи:

$$T_{eff} = \frac{TT_b}{T + T_b} = 7,11 \text{ dana}.$$

Тражено време t_x се добија из релације између активности и константе радиоактивног распада:

$$A = A_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\frac{\ln 2 \cdot t_x}{T_{eff}}},$$

$$\frac{A_0}{5} = A_0 e^{-\frac{\ln 2 \cdot t_x}{T_{eff}}},$$

$$t_x = \frac{T_{eff} \cdot \ln 5}{\ln 2} = 16,51 \text{ dan}.$$

Задатак 1.20

Одредити старост стене код које однос масе ^{40}Ar према ^{40}K износи 3,8. ^{40}K се распада на ^{40}Ar са периодом полураспада од $T = 1,27 \cdot 10^9 \text{ god}$. Сматрати да је природни ^{40}Ar је у потпуности настао распадом ^{40}K .

Решење

Како су моларне масе ^{40}K и ^{40}Ar једнаке, $M = 40 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, у одређеној маси стене, m_0 , присутно је $\frac{3,8}{3,8+1}m_0$ ^{40}Ar и $\frac{1}{3,8+1}m_0$ ^{40}K . На основу закона радиоактивног распада $m = m_0 e^{-\frac{\ln 2}{T}t}$, где је $m = \frac{1}{3,8+1}m_0$ маса распаднутог ^{40}K , тј. насталог ^{40}Ar . Старост стене је:

$$t = \frac{T}{\ln 2} \ln 4,8 = 2,87 \cdot 10^9 \text{ god}.$$

2 ДОЗИМЕТРИЈА

Дозиметрија јонизујућих зрачења је самостални део примењене нуклеарне физике који разматра особине јонизујућих зрачења, физичке величине које карактеришу поље зрачења и интеракцију са материјом, као и методе одређивања тих величина. Примарни узрок свих ефеката изазваних зрачењем је апсорпција енергије зрачења у озраченим објектима. Доза је мера енергије апсорбоване у материјалу и представља основну дозиметријску величину. Дозиметрија зрачења квантитативно повезује специфична мерења у пољу зрачења са хемијским и биолошким променама које зрачење производи у мети.

Дозиметрија има своје порекло у медицинским применама јонизујућих зрачења, које су отпочеле открићем рендгенског зрачења 1895. године. У интеракцији са материјом, зрачење производи ексцитоване и јонизоване атоме и молекуле, као и велики број секундарних електрона, који обављају додатне јонизације и ексцитације, све док на крају енергије свих електрона не опадну испод прага ексцитације. Почетна фаза, која траје врло кратко, реда 10^{-15} s, назива се физичка фаза, састоји се у јонизацијама и екситацијама и доводи до стварања хемијски активних центара у локалним регионима дуж путање честице. Ове промене, које су последица директне апсорпције енергије инцидентне честице у мети, представљају иницијалну тачку хемијских и биолошких процеса.

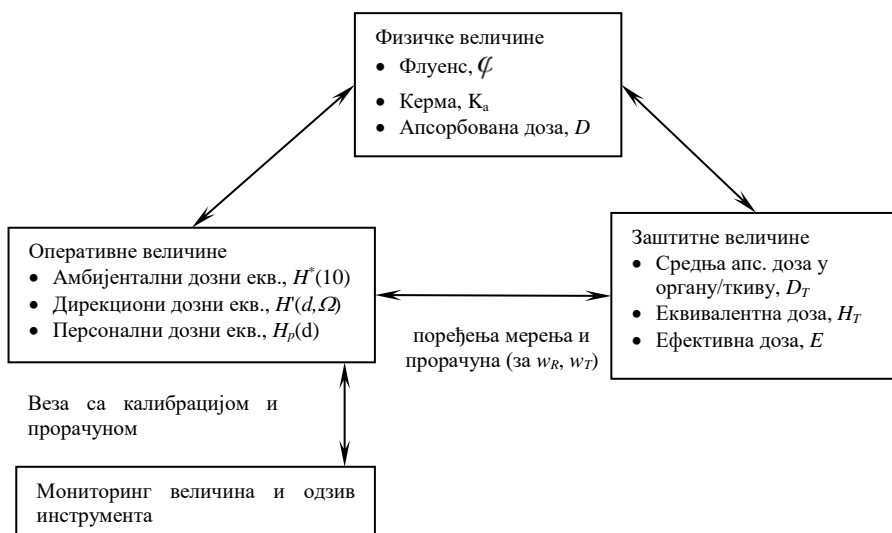
2.1 ВЕЛИЧИНЕ У ДОЗИМЕТРИЈИ И ЗАШТИТИ ОД ЗРАЧЕЊА

Описивање и квантификација излагања људи јонизујућем зрачењу захтева дефинисање специфичних величина и јединица. Дефиниције величина и јединица у заштити од зрачења су дате препорукама ICRU (Међународна Комисија за Радијационе Јединице) и ICRP (Међународна Комисија за Заштиту од Зрачења), у њиховим извештајима и публикацијама. Дефинисане су три групе величина: физичке, заштитне и оперативне.

Физичке величине су флуенс, ϕ , апсорбована доза, D и керма, K_a .

Скуп заштитних величина представљају: средња апсорбована доза у органу или ткиву D_T , еквивалентна доза у органу H_T , и ефективна доза E . Ове величине нису директно мерљиве, али се могу израчунати, ако су услови озрачивања познати.

ICRU је дефинисао скуп оперативних величина за индивидуални мониторинг и мониторинг области. Одговарајуће величине за мониторинг области су: амбијентални дозни еквивалент, $H^*(10)$, и дирекциони (управљени) дозни еквивалент $H(d, \Omega)$. Одговарајућа оперативна величина за индивидуални мониторинг је лични дозни еквивалент $H_p(d)$. Развој заштитних и оперативних величина довео је до система корелираних величина, који је приказан на сл. 2.1.



Слика 2.1. Веза између физичких величина и величина у заштити од зрачења

2.2 ФИЗИЧКЕ ВЕЛИЧИНЕ

Флуенс, ϕ , честица у некој тачки простора је количник броја честица које падају на малу (елементарну) сферу око те тачке и површине попречног пресека те сфере:

$$\phi = \frac{dN}{dS}.$$

Јединица је број честица по јединици површине (m^2).

Флукс честица представља количник броја честица dN , које прођу кроз дату површину за интервал времена dt и тог временског интервала:

$$F = \frac{dN}{dt}.$$

Јединица за флукс честица је s^{-1} .

На основу претходне релације може се дефинисати густина флука честица у некој тачки, као однос броја честица зрачења које прођу кроз елементарну сферу око те тачке и површине попречног пресека те сфере и одговарајућег временског интервала:

$$\phi = \frac{dF}{dS} = \frac{dN}{dS \cdot dt},$$

Одговарајући флукс енергије јонизујућег зрачења је количник укупне енергије свих јонизујућих честица, које прођу кроз неку површину за неки интервал времена и тог временског интервала.

$$F_E = \frac{dE}{dt}.$$

Јединица за флукс енергије је $J \cdot s^{-1}$.

Интензитет зрачења I представља густину флука енергије и дефинише се као производ густине флука честица ϕ и енергије зрачења E :

$$I = \phi \cdot E.$$

Интензитет зрачења или густина флука енергије у некој тачки простора је количник енергије пренете кроз елементарну сферу око те тачке у неком временском интервалу, и површине попречног пресека те сфере и одговарајућег временског интервала.

$$I = \frac{dF_E}{dS} = \frac{dE}{dS \cdot dt}$$

Јединица за интензитет зрачења је $\text{J} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

Kerma, K_a , (**K**inetic **E**nergy **R**ealised in **M**aterial) се дефинише изразом:

$$K_a = \frac{dE_k}{dm},$$

где је dE_k , средња сума почетних кинетичких енергија свих наелектрисаних честица које у процесу интеракције произведе ненаелектрисано јонизујуће зрачење у елементу масе dm . Мерна јединица је J/kg и носи специјални назив Grey, $1\text{Gy} = 1\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$.

У заштити од зрачења, радијационој биологији и клиничкој радиологији, апсорбована доза D је основна физичка величина. Користи се за све типове јонизујућег зрачења и за било коју геометрију озрачивања.

Апсорбована доза, D , се дефинише као количник средње енергије коју јонизујуће зрачење преда материји масе dm и масе dm :

$$D = \frac{d\bar{\epsilon}}{dm}.$$

Мерна јединица је J/kg и носи специјални назив Grey (Gy), $1\text{Gy} = 1\text{J}/\text{kg}$.

2.3 ЗАШТИТНЕ ВЕЛИЧИНЕ

Заштитне величине су уведене за потребе радиолошке заштите према препорукама ICRP. У ову групу величина спадају: средња апсорбована доза у органу или ткиву, еквивалентна доза у органу или ткиву и ефективна доза. Величина „апсорбована доза“ се дефинише тако да има одређену вредност у свакој тачки материје. Међутим, у практичним применама, апсорбоване дозе се често усредњавају преко веће запремине ткива. Претпоставља се, да за ниске дозе, средња вредност апсорбоване дозе у специфичном органу или ткиву може бити повезана са радијационим оштећењем од стохастичких ефеката у свим деловима тог органа или ткива са довољном тачношћу за сврху заштите од зрачења.

Средња апсорбована доза у органу или ткиву, D_T се дефинише као:

$$D_T = \frac{1}{m_T} \int_{m_T} D dm = \frac{1}{m_T} \int \frac{dE}{dm} dm,$$

где је m_T маса ткива или органа, и D је апсорбована доза у маси елемента dm . Средња апсорбована доза D_T једнака је количнику средње енергије ослобођене у органу или ткиву, $\bar{\epsilon}_T$, и одговарајуће масе m_T :

$$D_T = \frac{\bar{\varepsilon}_T}{m_T}.$$

Јединица за средњу апсорбовану дозу је J/kg и носи специјални назив Grey (Gy): 1Gy=1 J/kg.

Еквивалентна доза и радијациони тежински фактори

Дефиниција заштитних величина је заснована на средњој апсорбованој дози, $D_{T,R}$ у запремини одређеног органа или ткива T , услед зрачења типа R . У органу или ткиву, T , који су озрачени у мешовитом радијационом пољу које се састоји од више врста зрачења са различитим вредностима радијационог тежинског фактора, w_R , апсорбована доза од појединих врста зрачења се множи одговарајућим w_R .

Еквивалентна доза у органу или ткиву се дефинише као:

$$H_T = \sum_R w_R D_{T,R},$$

где је w_R је радијациони тежински фактор за зрачења R (урачунава различите врсте зрачења), чије су вредности дате у Табели 1. Сумирање се врши по свим типовима зрачења. Мерна јединица за еквивалентну дозу је J/kg и носи специјални назив, Sievert (Sv): 1 Sv=1J/kg.

Табела 1 Радијациони тежински фактори за поједине врсте зрачења

Тип зрачења	Радијациони тежински фактор, w_R
Фотони	1
Електрони и миони	1
Протони и наелектрисани пиони	2
α честице, фисиони фрагменти, тешки јони	20
Неутрони	Континуална крива у функцији енергије која се може апроксимирати изразом:

$$w_R = \begin{cases} 2.5 + 18.2^{-[\ln(E_n)]^2/6}, & E_n < 1 \text{ MeV} \\ 5 + 17.0^{-[\ln(2E_n)]^2/6}, & 1 \text{ MeV} \leq E_n \leq 50 \text{ MeV} \\ 2.5 + 3.25^{-[\ln(0.04E_n)]^2/6}, & E_n > 50 \text{ MeV} \end{cases}$$

Ефективна доза E , је збир производа еквивалентне дозе, H_T , у ткиву или органу T и ткивног тежинског фактора, w_T , по свим изложеним ткивима/органима тела. Дата је изразом:

$$E = \sum_T w_T H_T,$$

при чему је $\sum_T w_T = 1$. Мерна јединица за ефективну дозу је J/kg и носи специјални назив Sievert (Sv): 1 Sv=1J/kg.

Табела 2 Ткивни тежински фактори према ICRP103

Орган/ткиво	w_T	$\sum w_T$
Коштана срж, дебело црево, плућа,желудац, груди, ткиво остатка	0,12	0,72
Гонаде	0,08	0,08
Бешика, једњак, јетра, тироида	0,04	0,16
Ендостеум (површина костију), мозак, плувачне жлезде, кожа	0,01	0,04
Укупно		1,00

У Табели 2 су дате вредности за ткивне тежинске факторе према препорукама у публикацији ICRP 103. Ове препоруке су ажурирале ткивне тежинске факторе, а на основу најновијих доступних научних података при изложености јонизујућем зрачењу.

Органе остатка чине 13 органа: адреналне жлезде, екстратораксни регион, жучна кеса, срце, бубрези, лимфне жлезде, орална мукоза, простата (мушки пол), танко црево, слезина, панкреас, тимус и утерус/цервикс (женски пол). Сви органи остатка се третирају као један орган са тежинским фактором од 0.12.

Ефективна доза се рачуна коришћењем података за еквивалентну дозу органа мушког и женског пола, примењујући следећу формулу:

$$E = \sum_i w_T \left(\frac{H_{T,m} + H_{T,z}}{2} \right),$$

где симболи у једначини имају следеће значење: w_T су ткивни тежински фактори, док су $H_{T,m}$ и $H_{T,z}$ еквивалентне дозе органа за мушки и женски модел.

2.4 ОПЕРАТИВНЕ ВЕЛИЧИНЕ У ЗАШТИТИ ОД ЗРАЧЕЊА

Заштитне величине, еквивалентна доза и ефективна доза нису мерљиве, због чега се не могу користити директно као величине у радијационом мониторингу. Оперативне величине се користе за процену ефективне дозе или еквивалентне дозе у ткивима или органима.

Оперативне величине су засноване на дозном еквиваленту и дефинисане су помоћу ICRU за мерења у спољашњим пољима зрачења, и то су: амбијентални дозни еквивалент, дирекциони дозни еквивалент и лични дозни еквивалент. Прве две величине се користе за мониторинг области, док је последња за индивидуални мониторинг.

Дозни еквивалент, H , је производ Q и D у тачки у ткиву, где је D апсорбована доза а Q је фактор квалитета у тој тачки:

$$H = Q \cdot D.$$

Фактор квалитета у тачки у ткиву је дат следећом формулом:

$$Q = \frac{1}{D} \int_{L=0}^{\infty} Q(L) D_L dL,$$

где је D апсорбована доза у тој тачки, D_L расподела дозе D по линеарном трансферу енергије L , а $Q(L)$ је одговарајући фактор квалитета као функција од L . L или LET је линеарни трансфер енергије и дефинише се као количник средње енергије dE коју изгуби наелектрисана честица услед интеракција са електронима, прелазећи растојање dl :

$$L = \frac{dE}{dl}.$$

Јединица за линеарни трансфер енергије је J/m , често се даје у $keV/\mu m$.

За мониторинг области користи се оперативна величина за процену ефективне дозе, амбијентални дозни еквивалент. Амбијентални дозни еквивалент $H^*(10)$, у тачки поља зрачења је дозни еквивалент који би био произведен у одговарајућем пољу у ICRU сфери на дубини 10 mm, на радијусу супротном од правца усмерења поља.

За апроксимацију људског тела користи се ICRU сфера. То је теоријски фантом у облику сфере полупречника 15cm, који се састоји од ICRU меког ткива густине $1g/cm^3$, у чији састав улазе следећа 4 елемента: 76,2% кисеоника, 11,1% угљеника, 10,1% водоника и 2,6% азота.

За мониторинг области, величина за процену дозе је усмерени дозни еквивалент $H'(d, \Omega)$. Усмерени дозни еквивалент $H'(d, \Omega)$ у тачки радијационог поља је дозни еквивалент који би био произведен са одговарајућим проширеним пољем у ICRU сфери на дубини d , на радијусу у одређеном правцу, Ω .

Персонални дозни еквивалент, $H_p(d)$, представља дозни еквивалент на дубини d људског тела испод одређене тачке; за процену ефективне дозе, препоручује се дубина од 10 mm, док за процену еквивалентне дозе за кожу и екстремитете $d = 0,07$ mm, а за очно сочиво $d = 3$ mm.

2.5 ГУСТИНА ФЛУКСА ОД ТАЧКАСТИХ И ПРОДУЖЕНИХ ИЗВОРА

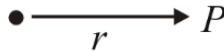
Геометријски, извори могу бити тачкасти и продужени (линијски, површински и запремински). *Тачкастим* се назива извор, чије су димензије много мање од растојања до детектора и чија густина флукса опада обрнуто пропорционално са квадратом тог растојања, претпостављајући изотропни карактер зрачења и одсуство самоапсорпције у материјалу извора. Задатак прорачуна поља зрачења од продужених извора у било којој тачки, своди се на интегралчење по дужини, површини или запремини тих извора, поља елементарних тачкастих извора, за које су задате одговарајуће густине расподеле.

Уводе се појмови линијске, A_L , површинске, A_S и запреминске специфичне активности, A_V , као број радиоактивних трансформација по јединици дужине, површине и запремине. Уколико се при сваком распаду емитује једна честица, (што често није случај) онда је број емитованих честица у јединици времена једнак са активношћу.

Број емитованих честица по једном распаду најчешће је различит од 1, због чега се уводи појам „принос“, η , као вероватноћа емисије честице по једном распаду. Дефинише се величина која описује продужене изворе $q = \eta A$; q [čest · s⁻¹] - број честица емитованих у секунди од тачкастог извора, q_L [čest · cm⁻¹ · s⁻¹] - број честица емитованих у секунди са јединичне дужине линијског извора (активност је распоређена по некој линији), q_S [čest · cm⁻² · s⁻¹] - број честица емитованих у секунди са јединичне површине и q_V [čest · cm⁻³ · s⁻¹] - број честица емитованих у секунди из јединичне запремине.

Задатак 2.1

Одредити густину флуksа ϕ у тачки P за дати тачкасти извор са слике 2.2.



Слика 2.2 Слика уз задатак 2.1

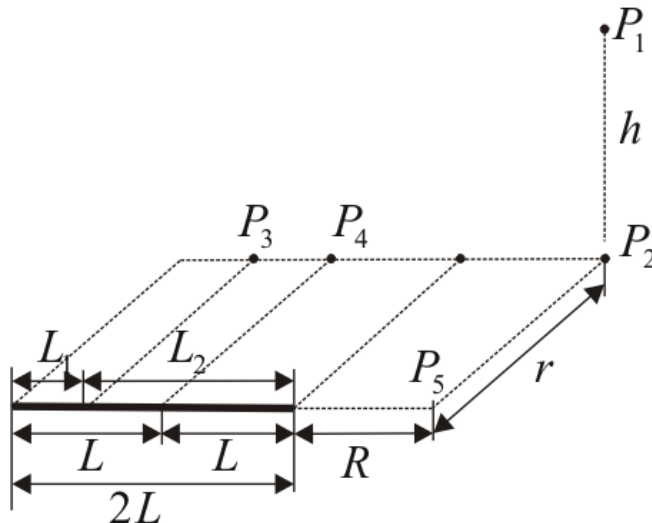
Решење

Формула за рачунање густине флуksа ϕ у тачки детекције P је

$$\phi = \frac{q}{4\pi r^2} = \frac{\eta A}{4\pi r^2}.$$

Задатак 2.2

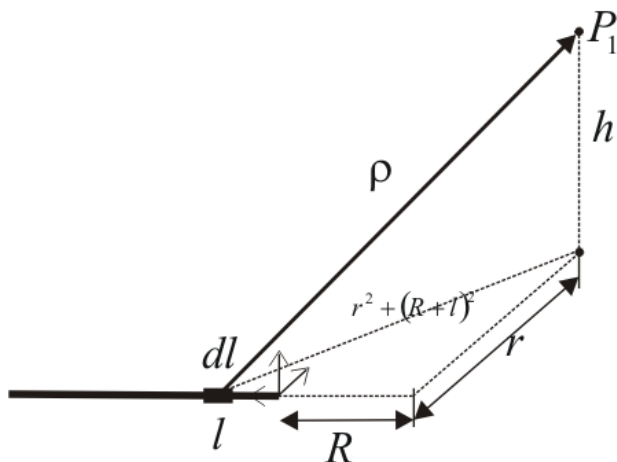
Наћи густину флуksа γ - кваната, које емитује линијски извор (активност је распоређена по дужини одсечка, где је $q_l dl$ - број γ - кваната емитованих са линијског елемента извора dl) у тачкама, које се налазе на различитим растојањима од њега, датих на слици 2.3.



Слика 2.3. Слика уз задатак 2.2

Решење

Оса - x је усмерена дуж извора, а координатни почетак је на почетку извора. За елемент dl , густина флукса $d\phi$ у тачки P_1 , која се налази на висини h од елемента dl је $d\phi = \frac{q_L}{4\pi\rho^2} dl$, слика 2.4:



Слика 2.4. Слика уз решење задатка 2.2

Са слике је $\rho^2 = r^2 + h^2 + (R+l)^2$ и $\phi = \frac{q_L}{4\pi} \int_0^{2L} \frac{dl}{r^2 + h^2 + (R+l)^2}$. Уводећи нову променљиву $x = l + R$, добија се $\phi = \frac{q_L}{4\pi} \int_R^{2L+R} \frac{dx}{r^2 + h^2 + x^2}$. Ово је тип интеграла $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a}$. После интеграције добија се општи израз:

$$\phi_1 = \frac{q_L}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 + h^2}} \left(\arctg \frac{2L+R}{\sqrt{r^2 + h^2}} - \arctg \frac{R}{\sqrt{r^2 + h^2}} \right).$$

Посебни случајеви:

($h = 0$), густина флукса у тачки P_2

$$\phi_2 = \frac{q_L}{4\pi r} \left(\arctg \frac{2L+R}{r} - \arctg \frac{R}{r} \right);$$

($h = 0$), густина флукса у тачки P_3

$$\phi_3 = \frac{q_L}{4\pi r} \left(\operatorname{arctg} \frac{L_1}{r} + \operatorname{arctg} \frac{L_2}{r} \right);$$

($h=0$), густина флукса у тачки P_4

$$\phi_4 = \frac{q_L}{4\pi r} \operatorname{arctg} \frac{L}{r};$$

За тачку P_5 , која се налази на оси извора ($h=0$, $r=0$), елементарна густина флукса је

$$d\phi = \frac{q_L}{4\pi(l+R)^2} dl.$$

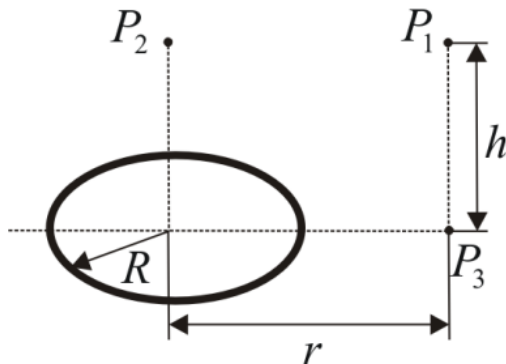
Укупна густина флукса се добија интегралом. Користи се тип интеграла

$$\int \frac{dx}{(a+x)^2} = -\frac{1}{a+x} \text{ и добија се:}$$

$$\phi_5 = \frac{q_L}{4\pi r} \int_0^{2L} \frac{dl}{(l+R)^2} = \frac{q_L \cdot L}{4\pi r(R+2L)}.$$

Задатак 2.3

Одредити укупну гуштину флукса у тачки P_1 који ствара извор, чија је активност распоређена по кружници полупречника R . На основу добијеног решења одредити јачину флукса у тачкама P_2 и P_3 . Занемарити самоапсорпцију и саморасејање.

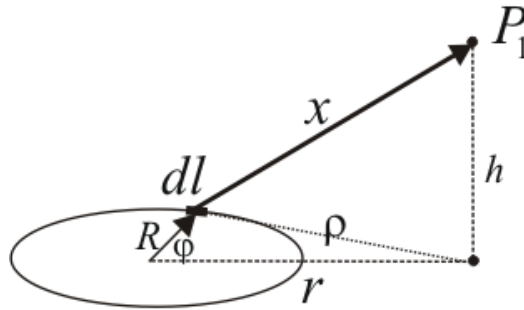


Слика 2.5 Слика уз задатак 2.3

Решење

Изаберимо такав координатни систем да пројекција тачке P_1 на раван кружнице пада на x -осу, а координатни почетак је у центру кружнице. Размотримо кружницу, чији је елемент дужине dl , а налази се на растојању R од центра, слика 2.6. Овај елемент дужине $dl = R \cdot d\varphi$ емитује $q_L \cdot dl$ γ -кваната. Елементарна густина флукса у тачки P_1 , једнака је

$$d\phi = \frac{q_L \cdot dl}{4\pi x^2},$$



Слика 2.6 Слика уз решење задатка 2.3

Са слике је $x^2 = \rho^2 + h^2$, што заменом у горњу једначину даје

$$d\phi = \frac{q_L R \cdot d\varphi}{4\pi(\rho^2 + h^2)}. \text{ Из косинусне теореме добија се величина } \rho,$$

$\rho^2 = r^2 + R^2 - 2rR \cdot \cos \varphi$. Сада је

$$d\phi = \frac{q_L R}{4\pi} \frac{d\varphi}{r^2 + R^2 - 2rR \cdot \cos \varphi + h^2}$$

Укупна густина флукса од целе кружнице је:

$$\phi = \frac{q_L R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{r^2 + R^2 - 2rR \cdot \cos \varphi + h^2}$$

Због симетрије геометрије, следи да је:

$$\phi = 2 \frac{q_L R}{4\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{r^2 + R^2 - 2rR \cdot \cos \varphi + h^2} = \frac{q_L R}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{r^2 + R^2 - 2rR \cdot \cos \varphi + h^2}$$

Овај интеграл се решава сменом $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = t, \varphi = 2 \operatorname{arctg} t, d\varphi = \frac{2dt}{1+t^2}, \cos \varphi = \frac{1-t^2}{1+t^2}$:

$$\phi = \frac{2q_L R}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\frac{1}{1+t^2} dt}{r^2 + R^2 + h^2 - 2rR \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}}.$$

Сређивањем се добија:

$$\frac{q_L R}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\frac{1}{1+t^2} dt}{r^2 + R^2 + h^2 - 2rR \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{q_L R}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dt}{(r^2 + R^2 + h^2) \cdot (1+t^2) - 2rR \cdot (1-t^2)},$$

$$\phi = \frac{q_L R}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dt}{(r-R)^2 + h^2 + [(R+r)^2 + h^2] t^2}.$$

Ово је тип интеграла

$$\int \frac{dt}{a+bt} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \arctgt,$$

$$\phi = \frac{q_L R}{\pi} \frac{1}{\sqrt{[(r-R)^2 + h^2] \cdot [(R+r)^2 + h^2]}} \int_0^{\infty} \arctgt \cdot dt.$$

Именилац се трансформише у:

$$\begin{aligned} & [(r-R)^2 + h^2] \cdot [(R+r)^2 + h^2] = \\ & [(r-R)(R+r)]^2 + h^2 [(R+r)^2 + (r-R)^2] + h^2 = \\ & (r^2 - R^2)^2 + 2(r^2 + R^2)h^2 + h^4 \end{aligned}$$

$$\text{и } \int_0^{\infty} \arctgt \cdot dt = \pi/2.$$

Коначно је решење дато изразом:

$$\phi = \frac{q_L \cdot R}{2} \frac{1}{\sqrt{(r^2 - R^2)^2 + 2(r^2 + R^2)h^2 + h^4}}.$$

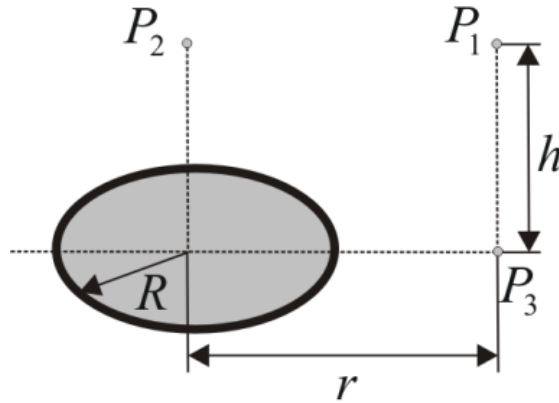
Посебни случајеви:

$$r = 0, \text{ тачка } P_2, \phi = \frac{q_L \cdot R}{2(R^2 + h^2)},$$

$$h=0, \text{ тачка } P_3, \phi = \frac{q_L \cdot R}{2(r^2 - R^2)}.$$

Задатак 2.4

Израчунати густину флукса γ -зрачења на оси диска радијуса R у тачки P_1 , која је удаљена од површине диска на растојању h . Број γ -кваната који је емитован са јединичне површине је q_s . Апсорпцију γ -кваната занемарити (видети слику 2.7).



Слика 2.7 Слика уз задатак 2.4

Решење

Размотримо кружни прстен, чији је елемент површине dS , а налази се на растојању $\rho, \rho + d\rho$ од центра прстена. Овај елемент површине емитије $q_s \cdot dS$ γ -кваната. Елементарна густина флукса у тачки P_1 , слика 2.8, једнака је (користи се процена растојања до тачке детекције из претходног задатка).

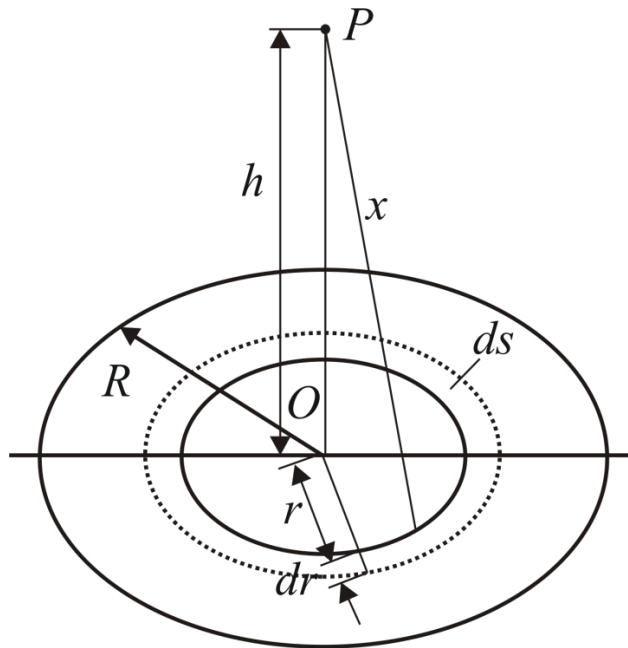
$$d\phi = \frac{q_s \cdot 2\pi\rho \cdot d\rho}{4\pi 2\sqrt{(r^2 - \rho^2)^2 + 2(r^2 + \rho^2)h^2 + h^4}},$$

$$\phi = \frac{q_s}{4} \int_0^R \frac{\rho \cdot d\rho}{\sqrt{(r^2 - \rho^2)^2 + 2(r^2 + \rho^2)h^2 + h^4}}.$$

Овај интеграл се решава сменом: $\rho^2 = u, 2\rho \cdot d\rho = du$:

$$\phi = \frac{q_s}{4} \int_0^R \frac{\rho \cdot d\rho}{\sqrt{(r^2 + h^2)^2 + 2(h^2 - r^2)\rho^2 + \rho^4}},$$

$$\phi = \frac{q_s}{4} \int_0^{R^2} \frac{du}{\sqrt{(r^2 + h^2)^2 + 2(h^2 - r^2)u + u^2}}.$$



Слика 2.8 Слика уз решење задатка 2.4

Допуни се пун квадрат под кореном

$$\phi = \frac{q_s}{4} \int_0^{R^2} \frac{du}{\sqrt{(r^2 + h^2)^2 + 2(h^2 - r^2)u + 4h^2r^2 - 4h^2r^2 + u^2}},$$

$$\phi = \frac{q_s}{4} \int_0^{R^2} \frac{du}{\sqrt{[u + (h^2 - r^2)]^2 + 4h^2r^2}}.$$

Користи се следећи интеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}),$$

и добија се:

$$\phi = \frac{q_s}{4} \int_0^{R^2} \frac{du}{\sqrt{[u + (h^2 - r^2)]^2 + 4h^2 r^2}},$$

$$\phi = \frac{q_s}{4} \ln \left[u + (h^2 - r^2) + \sqrt{[u + (h^2 - r^2)]^2 + 4h^2 r^2} \right] \Big|_0^{R^2},$$

$$\phi = \frac{q_s}{4} \ln \left[\frac{R^2 + (h^2 - r^2) + \sqrt{R^4 + 2R^2(h^2 - r^2) + (h^2 + r^2)^2}}{2h^2} \right].$$

Посебни случајеви:

$r = 0$:

$$\phi = \frac{q_s}{4} \ln \left[\frac{R^2 + (h^2 - r^2) + \sqrt{R^4 + 2R^2(h^2 - r^2) + (h^2 + r^2)^2}}{2h^2} \right],$$

$$\phi = \frac{q_s}{4} \ln \frac{h^2 + R^2}{h^2}.$$

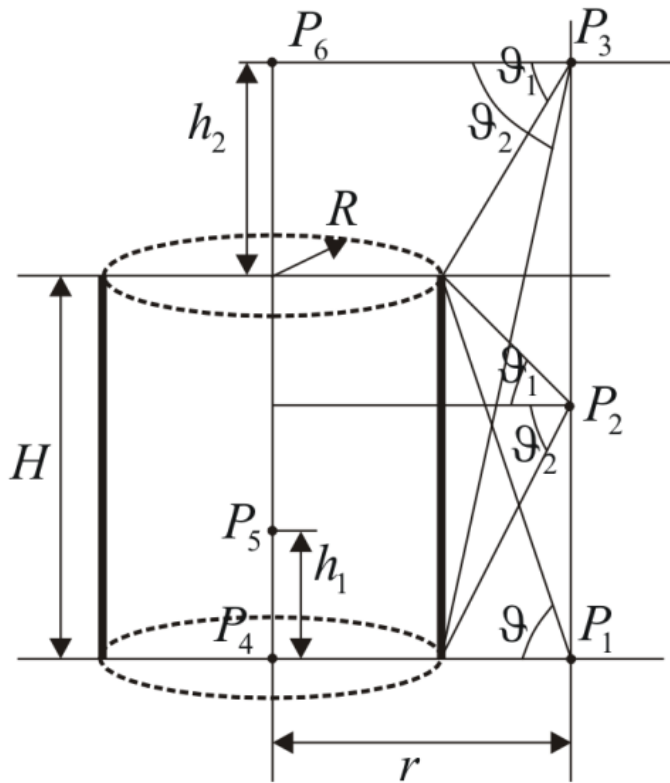
$h = 0$:

$$\phi = \frac{q_s}{4} \ln \left[\frac{R^2 + (h^2 - r^2) + \sqrt{R^4 + 2R^2(h^2 - r^2) + (h^2 + r^2)^2}}{2h^2} \right],$$

$$\phi = \frac{q_s}{4} \ln \frac{r^2}{r^2 - R^2}.$$

Задатак 2.5

Одредити густину флукса γ - кваната у тачки на оси ван и унутар цилиндричног неапсорбујућег извора, полупречника R и висине H , чији су унутрашњи бочни зидови покривени радиоактивним материјалом, ако се са јединичне површине емитује q_s γ - кваната, слика 2.9.



Слика 2.9 Слика уз задатак 2.5

Решење

Елементарна густина флукса $d\phi$, γ -кваната на оси извора од елемента dS , слика 2.10:

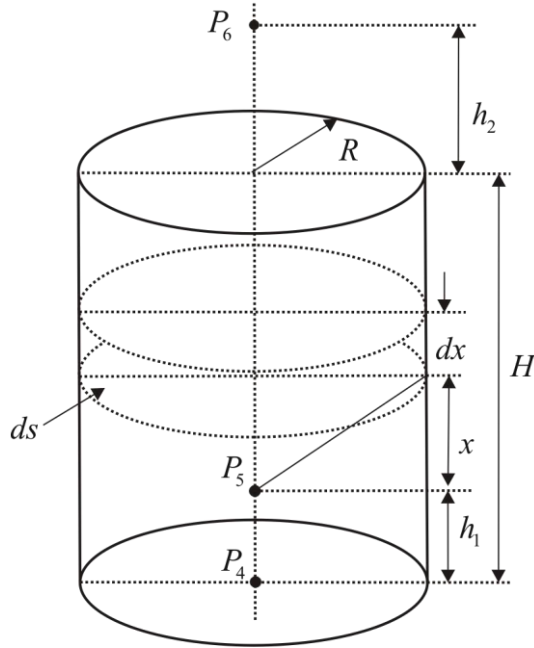
$$d\phi = \frac{q_s \cdot dS}{4\pi(x^2 + R^2)}.$$

Елемент бочне површине цилиндра је $dS = 2\pi R \cdot dx$, па је елементарна густина флукса:

$$d\phi = \frac{q_s \cdot 2\pi R \cdot dx}{4\pi(x^2 + R^2)}$$

Тачка $P_1, \varphi = \frac{q_s \cdot R}{2(r+R)} \cdot F(\vartheta, k)$, где је $F(\vartheta, k)$ елиптички интеграл првог

реда, $\vartheta = \arctg \frac{H}{r-R}$, $k = \arcsin \frac{2\sqrt{rR}}{r+R}$.



Слика 2.10 Слика уз решење задатка 2.5

Посебни случајеви:

$$\phi_2 = \frac{q_s \cdot R}{2(r+R)} \cdot [F(\vartheta_1, k) + F(\vartheta_2, k)],$$

$$\phi_3 = \frac{q_s \cdot R}{2(r+R)} \cdot [F(\vartheta_2, k) - F(\vartheta_1, k)].$$

Густина флукса γ -кваната у тачки P_2 , која се налази у центру основе цилиндра, тј $h_1 = 0$,

$$\phi_4 = \frac{q_s}{2} \operatorname{arctg} \frac{H}{R}.$$

Густина флукса γ -кваната у тачки P_1 унутар цилиндра:

$$\phi_5 = \int_0^h \frac{q_s \cdot 2\pi R \cdot dx}{4\pi(x^2 + R^2)} = \frac{q_s R}{2} \left(\int_0^{h_1} \frac{dx}{x^2 + R^2} + \int_0^{H-h_1} \frac{dx}{x^2 + R^2} \right),$$

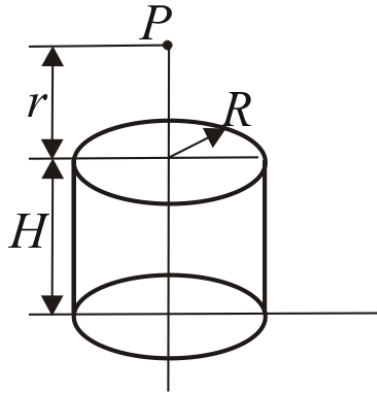
$$\phi_5 = \frac{q_s}{2} \left(\operatorname{arctg} \frac{h_1}{R} + \operatorname{arctg} \frac{H-h_1}{R} \right).$$

Тачка P_6 налази се ван цилиндричног извора, на висини h_2 од његове горње основе. Густина флукса γ -кваната у тачки P_6 је:

$$\phi_6 = \frac{q_s R}{2} \int_{h_2}^{h_2+H} \frac{dx}{x^2 + R^2} = \frac{q_s}{2} \left(\operatorname{arctg} \frac{h_2 + H}{R} - \operatorname{arctg} \frac{h_2}{R} \right).$$

Задатак 2.6

Одредити густину флукса γ -кваната од запреминског цилиндричног извора на његовој оси. Број γ -кваната који се емитује из јединичне запремине је q_v , слика 2.11.



Слика 2.11 Слика уз задатак 2.6

Решење

Размотримо кружни елемент запремине dV , $dV = dS \cdot dx = 2\pi r \cdot dr \cdot dx$, слика 2.12.

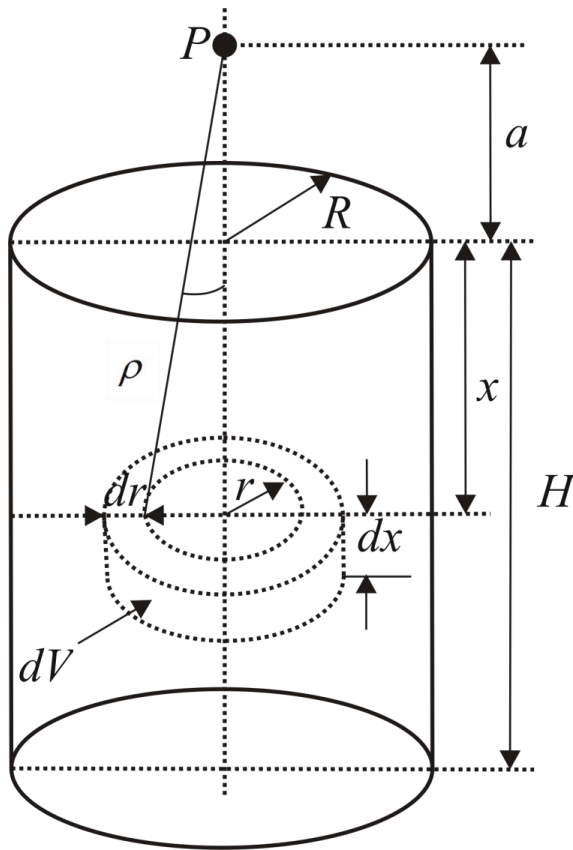
Елементарна густина флукса γ -кваната у тачки P од елемента запремине dV је:

$$d\phi = \frac{q_v \cdot dV}{4\pi\rho^2} = \frac{q_v \cdot 2\pi r \cdot dr}{4\pi\rho^2} dx = \frac{q_v}{2} \frac{r \cdot dr \cdot dx}{r^2 + (x+r)^2}.$$

Одавде је густина флукса γ -кваната у тачки P :

$$\phi = \frac{q_v}{2} \int_0^H dx \int_0^R \frac{r \cdot dr}{r^2 + (x+r)^2} = \frac{q_v}{2} \int_0^H dx \left\{ \frac{1}{2} \ln \left[r^2 + (x+r)^2 \right] \Big|_0^R \right\},$$

$$\phi = \frac{q_v}{4} \int_0^H dx \left\{ \frac{1}{2} \ln [R^2 + (x+r)^2] - \ln(x+r)^2 \right\}.$$



Слика 2.12 Слика уз решење задатка 2.6

Да би се решио последњи интеграл, уводи се смена $x+r=y$, при чему се користе следећи интеграл:

$$\int \ln(x^2 + a^2) dx = x \cdot \ln(x^2 + a^2) - 2x + 2a \cdot \arctg \frac{x}{a} \text{ и}$$

$$\int \ln x^2 \cdot dx = x \cdot \ln x^2 - 2x,$$

$$\phi = \frac{q_v}{4} \int_0^H dx \left\{ \ln [R^2 + (x+r)^2] - \ln(x+r)^2 \right\},$$

$$\phi = \frac{q_v}{4} \int_r^{H+r} \ln(y^2 + R^2) \cdot dy - \frac{q_v}{4} \int_r^{H+r} \ln y^2 dy,$$

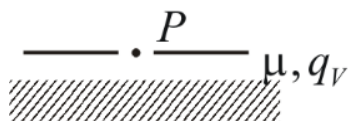
$$\phi = \frac{q_V}{4} \left\{ \left[(H+r) \cdot \ln \left(1 + \frac{R^2}{(H+r)^2} \right) \right] + \right. \\ \left. + 2R \cdot \operatorname{arctg} \frac{H+r}{R} - 2R \cdot \operatorname{arctg} \frac{r}{R} - r \cdot \ln \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \right\},$$

$$\phi = \frac{q_V}{4} \left\{ \left[y \cdot \ln(y^2 + R^2) \right] - 2y + 2R \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{R} \right|_r^{H+r} - \left[y \cdot \ln y^2 - 2y \right] \Big|_r^{H+r} \right\},$$

$$\phi = \frac{q_V}{4} \left\{ \left[(H+r) \cdot \ln \left(1 + \frac{R^2}{(H+r)^2} \right) \right] + \right. \\ \left. + 2R \cdot \operatorname{arctg} \frac{H+r}{R} - 2R \cdot \operatorname{arctg} \frac{r}{R} - r \cdot \ln \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \right\}.$$

Задатак 2.7

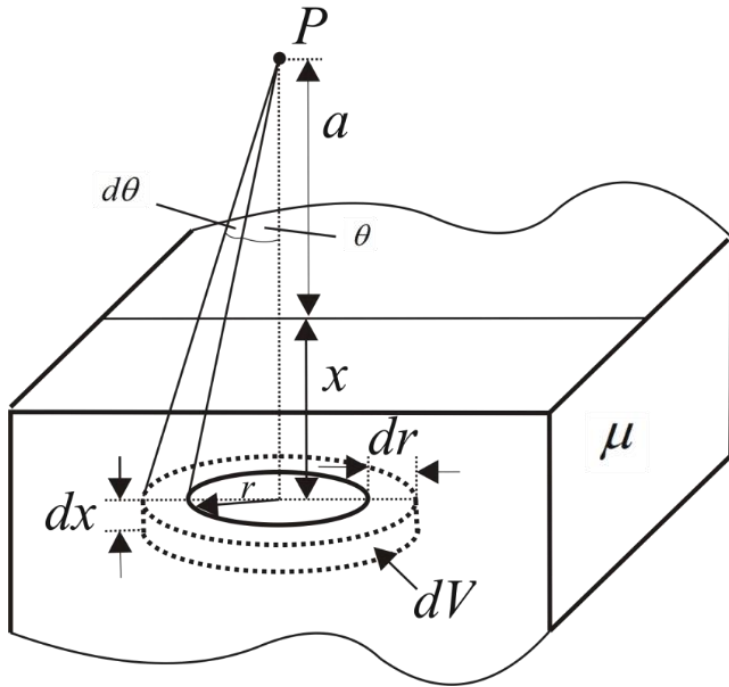
Израчунати густину флуksа примарних γ -кваната над полубесконачним простором са равномерно распоређеном запреминском активношћу. Линеарни коефицијент слабљења γ -зрачења у извору је μ (сл 2.13).



Слика 2.13 Слика уз задатак 2.7

Решење:

Елемент запремине dV се може написати у облику $dV = 2\pi r \cdot dr \cdot dx$, слика 2.14.



Слика 2.14 Слика уз решење задатка 2.7

Густина флукса примарних γ -кваната у тачки P , услед озрачивања елементарне запремине dV , узимајући у обзир апсорпцију у извору:

$$d\phi = \frac{q_V \cdot dV}{4\pi [r^2 + (a+x)^2]} e^{-\mu \frac{x}{\cos \theta}} = \frac{q_V}{2} \cdot \frac{r \cdot dr \cdot dx}{r^2 + (a+r)^2} e^{-\mu \frac{x}{\cos \theta}},$$

где је μ - линеарни коефицијент слабљења γ -кваната у средини, θ - угао под којим се види елемент површине dS из тачке P , $\cos \theta = \frac{a+x}{\sqrt{(a+x)^2 + r^2}}$.

Укупна густина флукса у тачки P је

$$\phi = \frac{q_V}{2} \int_0^\infty dx \int_0^\infty \frac{r \cdot e^{-\frac{\mu x \sqrt{(a+x)^2 + r^2}}{a+x}}}{r^2 + (a+r)^2} dr.$$

Уводи се смена $t = \mu x \frac{\sqrt{(a+x)^2 + r^2}}{a+x}$, те ће границе интеграције бити:

при $r=0$, $t=\mu x$; при $r=\infty$ $t=\infty$, па је $\frac{dt}{dr} = \frac{\mu x}{a+x} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2+(a+x)^2}}$ и

$$r \cdot dr = \frac{a+x}{\mu x} \cdot \sqrt{r^2+(a+x)^2} \cdot dt. ,$$

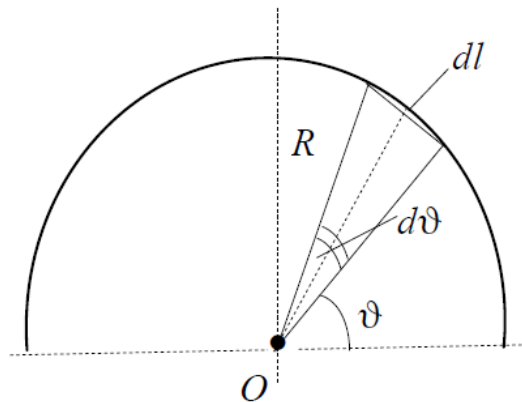
$$\phi = \frac{q_v}{2} \int_0^\infty dx \int_{\mu x}^\infty e^{-t} \cdot \frac{a+x}{\mu x} \cdot \sqrt{r^2+(a+x)^2} \cdot \frac{1}{r^2+(a+x)^2} \cdot dt = \frac{q_v}{2} \int_0^\infty dx \int_{\mu x}^\infty \frac{e^{-t}}{t} \cdot dt.$$

Други интеграл - експоненцијална функција $E_1(\mu x)$, даје:

$$\phi = \frac{q_v}{2} \int_0^\infty E_1(\mu x) dx = \frac{q_v}{2\mu} \cdot E_2(0) = \frac{q_v}{2\mu}.$$

Задатак 2.8

Запреминска активност ^{60}Co у воденој пари, која протиче кроз цевовод пречника 10cm, у моменту заустављања реактора износи 10^3 Bq/L. Цевовод је распоређен по кружници радијуса 3m. Одредити укупну густину флукса у центру круга.



Слика 2.15 Слика уз задатак 2.9

Решење

Узимајући у обзир да је дијаметар цеви мали у поређењу са линеарним димензијама цевовода, цев се може разматрати као танки (линијски) извор у облику прстена. Тада ће линијска активност извора A_L бити повезана са запреминском A_v релацијом:

$$A_L = \frac{A_v \cdot V}{2\pi \cdot R} = \pi r^2 \cdot A_v =$$

$$= 3,14 \cdot (5 \cdot 10^{-2})^2 \text{ m}^2 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \text{ Bq/m}^3 = 7,85 \cdot 10^3 \text{ Bq/m}$$

Кружни елемент се може одредити са слике:

$dl = 2R \cdot \sin \frac{d\vartheta}{2} = R \cdot d\vartheta$ (при малом углу $d\vartheta$). Тада је у центру круга елементарна густина флукса:

$$d\phi = \frac{q_L \cdot dl}{4\pi R^2}.$$

Укупна густина флукса у тачки О добија се интегралњем:

$$\phi = \frac{q_L}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi} R \cdot d\vartheta = \frac{q_L}{4\pi R^2} R \cdot 2\pi = \frac{q_L}{2R}.$$

Заменом бројних вредности добија се укупна густина флукса у центру круга.

$$\phi = \frac{q_L}{2R} = \frac{7,85 \cdot 10^3 \text{ Bq/m}}{2 \cdot 3 \text{ m}} = 1,31 \cdot 10^3 \cdot 2 \frac{\text{расп.}}{\text{s}} \cdot \frac{1}{\text{m}^2} = 2,62 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{s} \cdot \text{m}^2}.$$

Задатак 2.9

Изрaчуна̀ти јачину апсорбоване дозе у узорку масе $m = 150 \text{ g}$ меког ткива које је изложено флуенсу термалних неутрона од $\varphi = 10^7 \text{ cm}^{-2}$. Сваки догађај захвата са азотом резултира у депоновању енергије $E = 0,626 \text{ MeV}$, која се апсорбије у узорку јединичне густине ($\rho = 1 \text{ g} \cdot \text{cm}^3$). Концентрација атома азота у ткиву је $n = 1,29 \cdot 10^{21} \text{ cm}^{-3}$, док је ефикасни пресек за захват термалних неутрона $\sigma = 1,7 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$.

Решење

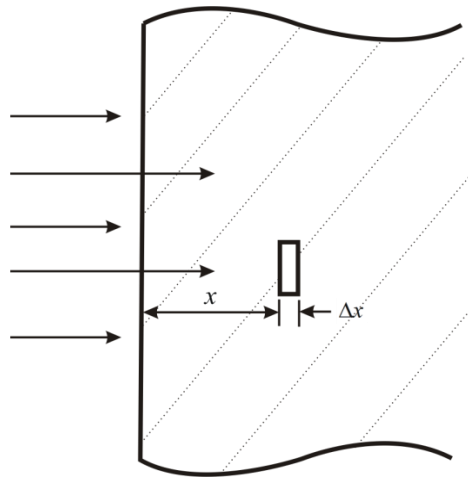
Како би се израчунала јачина апсорбоване дозе на дубини x , у извесном материјалу, разматра се танак запремински елеменат у облику диска са дебљином Δx у правцу нормалном на сноп, слика 2.16. Депозиција енергије у запреминском елементу је $E = \varphi \cdot S \left(-\frac{dE}{dx} \right) \Delta x$, где је $-\frac{dE}{dx}$, (сударна) зауставна моћ снопа честица када оне прођу растојање, x у плочи, φ , флуенс упадног зрачења, а S површина елемента дебљине Δx . Апсорбована доза D се добија дељењем депоноване енергије са масом $\rho S \Delta x$ запреминског елемента, где је ρ густина ткива или материјала:

$$D = \frac{\phi S (-dE/dx) \Delta x}{\rho S \Delta x} = \phi \left(\frac{dE}{\rho \cdot dx} \right),$$

Јачина апсорбоване дозе је промена апсорбоване дозе у јединици времена, тј.,

$$\dot{D} = \frac{dD}{dt} \phi \left(\frac{dE}{\rho \cdot dx} \right),$$

где је $\phi = \frac{d\phi}{dt}$, густина флукса честица кроз површину S .



Слика 2.16 Слика уз решење задатка 2.9

Следи да је доза по јединичном флуенсу на било којој дубини једнака масеној зауставној моћи за честице на тој дубини:

$$\frac{D}{\phi} = \left(\frac{dE}{\rho \cdot dx} \right).$$

Број интеракција по јединичном флуенсу по јединичној запремини у ткиву је $n\sigma$. Доза од флуенса $\phi = 10^7 \text{ cm}^{-2}$ је:

$$D = \frac{\phi n \sigma E}{\rho} = 2,22 \cdot 10^{-6} \text{ Gy}.$$

Задатак 2.10

Израчунати дозу првог судара у ткиву водоника по јединичном флуенсу од неутрона енергије $E = 5 \text{ MeV}$. Густина ткива је $\rho = 1 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, концентрација водоникових атома у ткиву износи $n = 5,98 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$, ефикасни пресек за

ресејање 5 MeV-ских неутрона је $\sigma = 1,61 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$, док је средња енергија изгубљена по судару, $Q_{avg} = 2,5 \text{ MeV}$.

Решење

Апсорбована доза од брзих неутрона скоро у потпуности потиче од енергије која се еластичним ресејањима преноси на атомска језгра у ткиву. Брзи неутрон губи у просеку око једне половине своје енергије у једном судару са водоником. Неутрон енергије 5 MeV, на пример, има макроскопски ефикасни пресек у меком ткиву од $0,051 \text{ cm}^{-1}$, тако да је његов средњи слободни пут једнак $1/0,051 = 20 \text{ cm}$. Тако на пример, ако је мета цело тело, велики део 5 MeV-ских неутрона неће правити вишеструке сударе, тако да се доза првог судара може користити као основа за апроксимацију стварне дозе. Брзи неутрони депонују већи део своје енергије у ткивима путем судара са водоником. Израчунавање дозе првог судара са водоником у ткиву често служи за процену дозе од брзих неутрона.

Користи се формула из задатка 2.9:

$$D = \frac{\varphi n \sigma E}{\rho},$$

тако да је доза по јединичном флуенсу :

$$\frac{D}{\varphi} = \frac{n \sigma Q_{avg}}{\rho} = 3,86 \cdot 10^{-11} \text{ Gy} \cdot \text{cm}^2.$$

Слична рачунања дозе првог судара услед судара 5 MeV-ских неутрона са језгрима O, C и N у меком ткиву, дају доприносе у $0,244 \cdot 10^{-11}$, $0,079 \cdot 10^{-11}$ и $0,024 \cdot 10^{-11} \text{ Gy} \cdot \text{cm}^2$, респективно, што представља укупно додатних 10%. Концентрација атома водоника, кисеоника и угљеника у ткиву је $5,98 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$, $2,45 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$ и $9,03 \cdot 10^{21} \text{ cm}^{-3}$ респективно. Детаљна анализа показује да узмакнути водоник доприноси око 85–95% дози првог судара у меком ткиву неутрона са енергијама између 10 keV и 10 MeV.

Детаљна израчунавања вишеструких судара неутрона и депозиције енергије у различитим фантомима, као што су: плоча, сфера, цилиндар као и антропоморфни фантоми, воксел, хибридни и меш фантоми, обављају се Монте Карло методама. Доступни су компјутерски програми, који су засновани на експерименталним ефикасним пресецима и теоријским алгоритмима за транспорт појединачних неутрона кроз мету са истом статистичком расподелом за неутроне који се налазе у природи.

Задатак 2.11

Комора која задовољава Браг-Грејеве услове садржи 15g гаса при чему је W вредност 33eV/jp . Количник масене зауставне моћи зида и гаса је 1,03. Израчунати јачину електричне струје која тече кроз јонизациону комору у режиму потпуног сакупљања наелектрисања створеног зрачењем, ако је јачина апсорбоване дозе у зиду 10mGy/h .

Решење

На основу Браг-Грејевог принципа, ако је гас затворен зидовима истог атомског састава и ако су зидови под унапред датим условима, тада је апсорбована енергија по јединици масе у гасу D_g једнака апсорбованој дози у зиду D_w :

$$D_w = D_g = \frac{N_g \cdot W}{m},$$

где је N_g број јонских парова створених зрачењем у гасу масе m . Када су гас и зидови коморе различитог атомског састава, апсорбована доза у зиду још увек може да се добије из јонизације у гасу. У овом случају димензије шупљине и притисак су мали, тако да секундарне наелектрисане честице губе само мали део енергије у гасу. Апсорбована доза се скалира као количник масених зауставних моћи зида и гаса:

$$D_w = D_g \frac{S_w}{S_g} = D_g \frac{N_g W S_w}{m S_g}.$$

Према условима у поставци задатка $S_w/S_g = 1,03$ и

$$\dot{D}_w = 10\text{mGy/h} = \frac{10}{3600} \cdot 10^{-3} \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{s}) = 2,78 \cdot 10^{-6} \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{s}),$$

из претходне једначине, брзина производње јонских парова у гасу је:

$$\dot{N}_g = \dot{D}_g \frac{m S_g}{W S_w} = 2,78 \cdot 10^{-6} \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{s}} \cdot \frac{0,15 \cdot 10^{-3} \text{ kg}}{33 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J/jp} \cdot 1,03},$$

$$\dot{N}_g = 7,67 \cdot 10^7 \text{ jp/c}.$$

Одговарајућа јачина електричне струје је:

$$I = \dot{N}_g e = 7,67 \cdot 10^7 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C/s} = 1,23 \cdot 10^{-11} \text{ A}.$$

Задатак 2.12

Алфа честица се емитије у лопти испуњеној ваздухом радијуса $r = 3\text{ cm}$ почетном енергијом од $E = 2\text{ MeV}$. Колика је доза у ваздуху сфере, ако алфа честица у сфери пређе пут од $R_0 = 0,6\text{ cm}$ и изађе из ње? Густина ваздуха је $0,0012\text{ g/cm}^3$.

Решење

Домет алфа честица у ваздуху се рачуна према формули $R = 0,325 E^{3/2}$, где је E енергија дата у MeV -има, а домет је у cm :

$$R = 0,325 \cdot E^{3/2} = 0,325 \cdot 2^{3/2} = 0,919\text{ cm},$$

$$R_1 = R - R_0 = 0,319\text{ cm},$$

$$E_1 = \left(\frac{R_1}{0,325} \right)^{2/3} = 0,98\text{ MeV},$$

$$\Delta E = E - E_1 = 2\text{ MeV} - 0,98\text{ MeV} = 1,02\text{ MeV}.$$

Доза се добија као количник предате енергије и масе ваздуха у сфери;

$$D = \frac{\Delta E}{m} = \frac{\Delta E}{\rho \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 \pi} = \frac{1,02 \cdot 1,602 \cdot 10^{-13}\text{ J}}{0,136\text{ kg}} = 12,15 \cdot 10^{-13}\text{ Gy}.$$

Задатак 2.13

Нека је у материјалу масе 50 g апсорбовано $n = 10^9$ α -честица, чија је енергија $E_\alpha = 4,9\text{ MeV}$. Израчунати апсорбовану и еквивалентну дозу алфа зрачења.

Решење

Апсорбована доза представља количник укупне депоноване енергије α -честица и масе материјала:

$$D = \frac{n \cdot E_\alpha}{m} = \frac{4,9\text{ MeV} \cdot 10^9}{50 \cdot 10^{-3}\text{ kg}} = \frac{4,9 \cdot 1,602 \cdot 10^{-13}\text{ J} \cdot 10^9}{50 \cdot 10^{-3}\text{ kg}} = 15,70\text{ mGy}$$

Еквивалентна доза је производ радијационог тежинског фактора за α -честице и апсорбоване дозе:

$$H = w_R \cdot D = 20 \cdot 15,70\text{ mGy} = 314\text{ mSv} = 0,31\text{ Sv}$$

Задатак 2.14

Која је просечна јачина дозе у узорку од меког ткива чија је маса $m = 50\text{g}$ које садржи ^{14}C активности $A = 1,2 \cdot 10^5 \text{Bq}$? Средња енергија бета честица ^{14}C је $\bar{E} = 0,0495 \text{MeV}$.

Решење

Специфична активност је $A_s = \frac{A}{m}$. Јачина апсорбоване дозе је $\dot{D} = A_s \bar{E} = 19 \text{nGy} \cdot \text{s}^{-1}$. Ова процедура даје средњу јачину дозе у ткиву које садржи радионуклиде. Постојање "врућих тачака" за неуниформно распоређене унутрашње емитере може да закомпликује процену орган-дозе. Неуниформно таложење може настати, на пример, када удахнуте честице постају уграђене у различитим регионима плућа.

Задатак 2.15

Нека узорак ткива у задатку 2.14 има густину једнаку јединици и облик сфере радијуса $r = 2,29 \text{cm}$. За равномерну расподелу ^{14}C , направити грубу процену фракције енергије бета честица које изађу из ткива. Домет бета честица енергије $E = 0,0495 \text{MeV}$ у меком ткиву износи $R = 0,0042 \text{cm}$.

Решење

Прво је потребно упоредити домет бета честице која има средњу енергију $\bar{E} = 0,0495 \text{MeV}$ са радијусом сфере ткива. Бета честица средње енергије која се емитије даље од $0,0042 \text{cm}$ од површине сфере ткива ће се апсорбовати у сфери. Фракција f од запремине ткива која се налази близу површине може се израчунати из разлике запремина између сфера са радијусима r и $r - R$. Алтернативно, можемо диференцирати израз за запремину по V :

$$f = \frac{dV}{V} = \frac{3dr}{r} = \frac{3 \cdot 0,0042}{2,29} = 5,5 \cdot 10^{-3}.$$

Ако се претпостави да се једна половина средње енергије бета честица емитована у спољашњем слоју апсорбује у сфери, а друга половина напусти сферу, фракција енергије бета честица који изађу из сфере има веома малу вредност:

$$f/2 = 2,75 \cdot 10^{-3}.$$

Задатак 2.16

На кожу површине $S = 6 \text{ cm}^2$ пада нормално $N = 3,2 \cdot 10^4$ алфа честица енергије $E = 5,1 \text{ MeV}$. Наћи средњу вредност апсорбоване дозе D и средњу вредност еквивалентне дозе у слоју чија је дебљина једнака домету алфа честица у биолошком ткиву. Узети да је домет алфа честице у биолошком ткиву $d = 43,5 \mu\text{m}$, а радијациони тежински фактор w_R за алфа честицу је 20. Претпоставити да је густина ткива $\rho \approx 1 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$.

Решење

Апсорбована доза износи:

$$D = NE/Sd\rho = 1 \text{ mGy} ,$$

док је еквивалентна доза:

$$H = w_R D = 20 \text{ mSv} .$$

Задатак 2.17

У просеку, 0,27% масе људског тела чини калијум, K . Калијум се у природи јавља у виду изотопске смеше, у којој је присутан радиоактиван ^{40}K , чији је период полураспада $T = 1,25 \cdot 10^9 \text{ god}$. При сваком распаду ослободи се у просеку $E = 0,5 \text{ MeV}$ енергије од β и γ зрачења, које се у већини апсорбује у телу. Мала фракција енергије успе да се емитује из људског тела у виду зрачења. Израчунати колико атома ^{40}K је присутно у људском организму масе $m = 80 \text{ kg}$. Под претпоставком да се енергија која се не апсорбује у организму од распада ^{40}K може занемарити, одредити апсорбовану дозу током пеосечног људског живота од $t = 70 \text{ god}$, од ове врсте унутрашњег излагања.

Решење

Маса радиоактивног ^{40}K у људском организму је:

$$m_K = 0,0027 \cdot 0,00021 \cdot m = 5,67 \cdot 10^{-7} \cdot m_t .$$

Број атома ^{40}K у људском организму износи:

$$N_K = \frac{m_K}{M} N_A = 6,83 \cdot 10^{20} .$$

Активност ^{40}K износи, $A = \frac{\ln 2}{T} N$, док се доза може одредити релацијом:

$$D = \frac{E_{abs}}{m} .$$

Укупна апсорбована енергија E_{abs} у току времена $t = 70 \text{ god.}$ износи

$$E_{abs} = A \cdot t \cdot E ,$$

одакле је

$$D = A \cdot t \cdot \frac{E}{m} = 2,63 \cdot 10^{-2} \text{ Gy} .$$

Задатак 2.18

Радник (професионално изложено лице) је примио у току једне године апсорбовану дозу од $D = 18 \text{ mGy}$ спољашњим озрачивањем целог тела гама зрачењем. Поред тога, процењено је да је због радионууклида унетих у тело током исте године примио 50-годишњу очекивану дозу од 8 mGy од алфа честица у плућима и 180 mGy од бета честица у штитастој жлезди.

- Колика је ефективна доза за овог радника?
- Колику додатну дозу од спољашњег униформног озрачивања гама зрацима по целом телу би радник могао да прими током исте године тако да не премаши годишњу границу ефективне дозе?
- Колику додатну очекивану дозу од озрачивања црвене коштане сржи алфа честицама би радник могао да прими током исте године тако да не премаши годишњу границу ефективне дозе?

Решење

а) Еквивалентне дозе у органима износе:

$$H_{lungs} = w_R \cdot D_{lungs} = 20 \cdot 8 \text{ mGy} = 160 \text{ mSv} ,$$

$$H_{thyroid} = w_R \cdot D_{thyroid} = 1 \cdot 180 \text{ mGy} = 180 \text{ mSv} ,$$

$$H_{wholebody} = w_R \cdot D = 1 \cdot 18 \text{ mGy} = 18 \text{ mSv} .$$

За рачунање ефективне дозе користе се ткивни тежински фактори, w_T , који имају вредности 0,12, 0,04 и 1 за плућа, штитасту жлезду и цело тело, респективно:

$$E = \sum_T w_T \cdot H_T = 0,12 \cdot 160 \text{ mSv} + 0,04 \cdot 180 \text{ mSv} + 1 \cdot 18 \text{ mSv} = 44,4 \text{ mSv} .$$

б) Годишња граница ефективне дозе за професионално изложена лица од 20 mSv представља петогодишњи просек у било ком непрекидном периоду од 5 година, што значи (100mSv/5 year), али тако да ефективна доза буде највише 50 mSv током било које године:

$$50 \text{ mSv} - 44,4 \text{ mSv} = 5,6 \text{ mSv} .$$

С обзиром да је за цело тело $w_T = 1$, додатна доза од спољашњег униформног гама озрачивања, када ефективна доза радника не пређе годишњу границу, је 5,6 mSv .

в) Очекивана еквивалентна доза за црвену коштану срж ($w_T = 0,12$) која одговара ефективној дози од 3,8 mSv је $H_{RBM} = 5,6 \text{ mSv} / 0,12 = 46,67 \text{ mGy}$. Како је радијациони тежински фактор за алфа честице $w_R = 20$, додатна доза црвене коштане сржи при озрачивању алфа честицама, а да ефективна доза радника не пређе годишњу границу је:

$$D_{RBM} = 46,67 \text{ mGy} / 20 = 2,33 \text{ mGy} .$$

Задатак 2.19

Дата је функција расподеле активности у току времена за чисти бета емитер у неком ткиву, на пример у бубрегу, $f(t) = A \cdot e^{-at} + B \cdot e^{-bt}$, при чему су коефицијенти: $A=B=378$, $a=3/\text{h}$, $b=1/\text{h}$. Монте Карло софтвером је израчуната апсорбована доза по једној честици, која износи 1,2 Gy/честици. Израчунати апсорбовану дозу у том ткиву за првих 50 h.

Ако је ткивни тежински фактор за дати орган, на пр. бубреге 0,04 и ако је само тај орган био изложен зрачењу, израчунати еквивалентну дозу за тај орган, као и допринос ефективној дози целог тела.

Решење:

Заменом коефицијената у дату функцију, добија се:

$$f(t) = 378 \cdot e^{-3t} + 378 \cdot e^{-t}$$

Како је циљ добити апсорбовану дозу у Грејима по јединици апликоване активности (mGy/MBq), неопходно је одредити и дистрибуцију активности у циљаним ткивима у времену, тј. *Time-activity curve* - $f(t)$.

Интеграљењем ове криве у времену и множењем са апсорбованом дозом по једној честици добија се апсорбована доза у ткиву бубрега по јединици унете активности.

$$\int_0^{50} f(t) dt = \int_0^{50} (378 \cdot e^{-3t} + 378 \cdot e^{-t}) dt = 378 \left(-\frac{1}{3} e^{-3t} \Big|_0^{50} - 378 e^{-t} \Big|_0^{50} \right) \approx \frac{4}{3},$$

$$D = D_{k1} \cdot \int_0^{50} f(t) dt = 1,2 \text{ Gy/part.} \cdot \frac{4}{3} = 1,6 \text{ Gy}.$$

Одговарајућа еквивалентна доза једнака је производу радијационог тежинског фактора за бета честице и апсорбоване дозе:

$$H = w_R D_T = 1 \cdot 1,6 \text{ Gy} = 1,6 \text{ Sv},$$

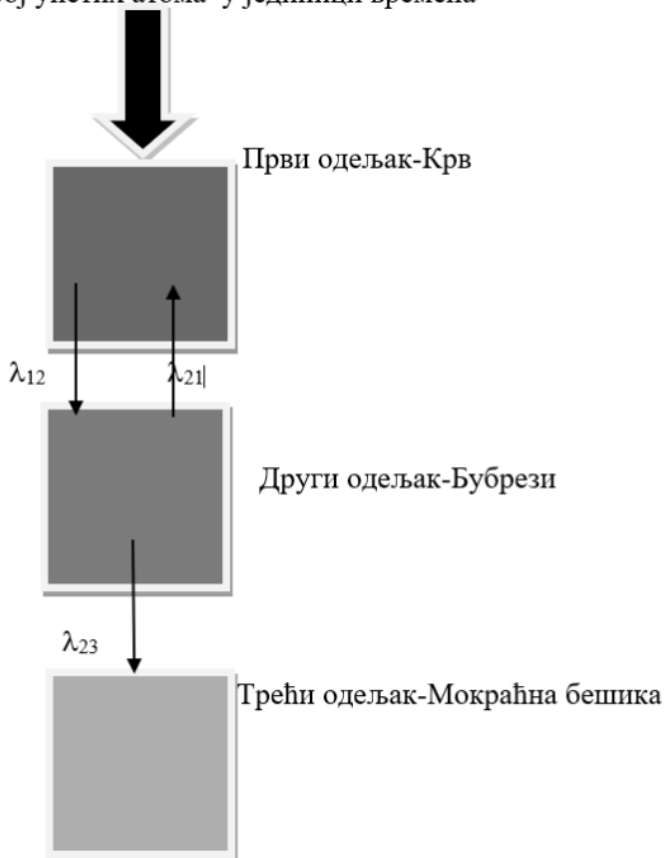
$$E = w_T H_T = 0,04 \cdot 1,6 \text{ Sv} = 64 \text{ mSv}.$$

Апсорбована доза по једној емитованој честици добија се Монте Карло програмима, као што су MCNP, GEANT, EGS, PENELOPE и други, који дају апсорбовану дозу у органима и ткивима по једној емитованој честици.

Задатак 2.20

Поставити диференцијалне једначине, које описују промену броја атома N_i у биокинетичком моделу са три компартамента, као на слици:

R-број унетих атома у јединици времена



Слика 2.17 Слика уз задатак 2.20

Решење:

Прецизан математички опис догађаја у људском организму током апликације конкретне радиоактивне супстанце (радиофармацеутика), могуће је дефинисати скупом диференцијалних једначина.

Људски организам се може представити као систем одељака (compartments). Претпоставимо да први представља крв, други бубреге, а трећи је мокраћна бешика. Константа U представља укупан број унетих атома, односно $U = \frac{A_{00}}{\lambda_s}$

при чему је A_{00} укупна апликована активност разматраног случаја, λ_s је константа распада у секундама.

Количник укупног броја унетих атома U са временом апликације T представља број унетих атома у јединици времена:

$$R = U / T .$$

Промена броја атома у току апликације радиоактивности у првом компартменту, тј., у крви се може представити диференцијалном једначином:

$$\frac{dN_1}{dt} = R - \lambda N_1 - \lambda_{12} N_1 + \lambda_{21} N_2 .$$

Промена броја атома у преостала два компартмента дата је следећим диференцијалним једначинама:

$$\frac{dN_2}{dt} = -\lambda N_2 + \lambda_{12} N_1 - \lambda_{21} N_2 - \lambda_{23} N_2 ,$$

$$\frac{dN_3}{dt} = -\lambda N_3 + \lambda_{23} N_2 ,$$

где су константе λ_{ij} : λ_{12} константа преноса радиофармацеутика из крви у бубреге, λ_{21} константа преноса из бубрега у крв, а λ_{23} а константа преноса радиофармацеутика из бубрега у мокраћну бешику,

$$\frac{dN_1}{dt} + (\lambda + \lambda_{12}) N_1 = U + \lambda_{21} N_2 ,$$

$$\frac{dN_2}{dt} + (\lambda + \lambda_{21} + \lambda_{23}) N_2 = \lambda_{12} N_1 ,$$

$$\frac{dN_3}{dt} + \lambda N_3 = \lambda_{23} N_2 .$$

Добијен је скуп међусобно повезаних линеарних диференцијалних једначина, које се могу решити аналитички компликованим поступком вишеструког диференцирања, на основу почетних услова. На основу константи преноса могу се одредити дозе у циљаном тумору и органима од интереса и проценити оптималну апликовану активност.

2.6 ЕКСПОЗИЦИОНА ДОЗА

Главна карактеристика јонизујућег зрачења је да врши јонизацију средине кроз коју пролази. Под јонизацијом се подразумева избацивање електрона из атома материје. Ако је молекул јонизован може доћи до низа процеса, као што је дисоцијација, стварање нових хемијских једињења и сл. За откривање и мерење зрачења природно је мерити количину зрачењем створеног слободног наелектрисања. Једна од првих физичких величина дефинисаних за мерење зрачења је експозициона доза, која се означава са X . Она се дефинише као количник укупног створеног наелектрисања истог знака, dQ , у ваздуху и масе ваздуха, dm , у којој се интеракција одиграла, тј.

$$X = \frac{dQ}{dm}.$$

Јединица за мерење експозиционе дозе је $\frac{C}{kg}$. Стара вансистемска јединица је

Roentgen, ознака је R и износи $2.58 \cdot 10^{-4} C kg^{-1}$. Експозициона доза се дефинише само за x , гама и неутронско зрачење (посредно јонизујуће зрачење). Поред познавања укупног створеног наелектрисања, од значаја је и брзина којом је то наелектрисање створено у времену. Због тога је уведена и величина која се назива јачина експозиционе дозе \dot{X} и дефинише се као

$$\dot{X} = \frac{dX}{dt} = \frac{d^2Q}{dm dt}.$$

Јединица за јачину експозиционе дозе је $\frac{C}{kg \cdot s} = \frac{A}{kg}$.

Задатак 2.21

а) Под дејством космичког зрачења и зрачења радиоизотопа у тлу и околини, у $V = 1 m^3$ ваздуха под нормалним условима се сваке секунде просечно формира око $N = 2 \cdot 10^6$ јонских парова. Израчунати коликој експозиционој дози јонизујућег зрачења је човек изложен током $t = 12 h$. Густина ваздуха под нормалним условима је $\rho = 1,29 kg \cdot m^{-3}$. Наелектрисање електрона је $e = 1,602 \cdot 10^{-19} C$.

б) Проценити колико се молекула ваздуха (резултат изразити у %), који се налази под нормалним условима, јонизује под дејством гама зрачења, ако је експозициона доза којој је ваздух изложен $X = 320 \mu C/kg$. Моларна маса ваздуха под нормалним условима је $M = 29 g/mol$.

Решење

а) Експозициона доза је $X = \frac{dQ}{dm}$. Јачина експозиционе дозе је $\dot{X} = \frac{d^2Q}{dm dt}$, тј.

$X = \int \dot{X} dt$. За средње вредности можемо писати $X = \dot{X} t$. Како је $\dot{X} = \frac{N \cdot e}{\rho V}$,

$X = \frac{N \cdot e}{\rho V} t$, односно:

$$X = \frac{N \cdot e}{\rho V} t = \frac{2 \cdot 10^6 \text{ jп/s} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}}{1,29 \text{ kg/m}^3 \cdot 1 \text{ m}^3} \cdot 12 \cdot 3600 \text{ s} = 1,07 \cdot 10^{-8} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

б) Експозициона доза је $X = N_j \cdot e$

$$N_j = \frac{X}{e} \cong 2 \cdot 10^{15}.$$

Ако се ознаком N обележи број молекула у 1kg ваздуха, а моларна маса ваздуха под нормалним условима је $M = 29 \text{ g/mol} = 0,029 \text{ kg/mol}$, тада је:

$$N = \frac{N_A}{M} = 2,08 \cdot 10^{25}.$$

Тражени проценат јонизованих молекула је:

$$\frac{N_j}{N} = 0,9615 \cdot 10^{-10} = 9,615 \cdot 10^{-9} \text{ \%}.$$

Задатак 2.22

За мерење интензитета рендгенског зрачења користи се јонизациона комора запремине $V = 500 \text{ cm}^3$, у којој се налази ваздух под нормалним условима. При излагању коморе рендгенском зрачењу, јачина струје кроз комору је $I = 0,01 \mu\text{A}$. Колика је експозициона доза рендгенског зрачења којој је изложен ваздух у комори? Густина ваздуха је $\rho = 1,29 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, а време $t = 5 \text{ s}$.

Решење:

Експозициона доза износи

$$X = \frac{Q}{m}, \text{ где је}$$

$$Q = It,$$

$$X = \frac{N_j e}{m} = \frac{It}{\rho V} = 77,52 \frac{\mu\text{C}}{\text{kg}}.$$

Задатак 2.23

Јонизациона комора запремине $V=1L$ напуњена ваздухом под притиском 1250kPa је изложена хомогеном флуксу гама зрачења. Температура ваздуха износи $T=300\text{ K}$, док је струја засићења у комори $I=0,22\text{ A}$. Наћи јачину експозиционе дозе гама зрачења. Универзална гасна константа је $R=8,31\text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$, а моларна маса ваздуха је $M=29\text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$.

Решење:

Из једначине идеалног гаса следи:

$$pV = nRT,$$

где је број молова $n = m / M$

$$\dot{X} = \frac{I}{mt} = \frac{IRT}{pMV} = 15,13\text{ C}\cdot\text{kg}^{-1}\text{s}^{-1}.$$

Задатак 2.24

Период полураспада радиоактивног извора гама зрачења износи $T=52\text{ h}$. Јачина експозиционе дозе у почетном тренутку износи $X_0=36\text{ nC}\cdot\text{kg}^{-1}\text{s}^{-1}$.

а) Израчунати експозициону дозу за време $t=8\text{ h}$.

б) Одредити време за које апсорбована доза у ваздуху износи $D=150\text{ mGy}$.

Средњи јонизациони потенцијал по јединици наелектрисања у ваздуху износи $\alpha=34\text{ J}\cdot\text{C}^{-1}$.

Решење

а) Јачина експозиционе дозе износи $\dot{X}_0 = C \frac{A_0}{r^2}$, где је C константа пропорционалности која се назива јонизациона константа и даје се у $\left[\frac{\text{Cm}^2}{\text{kg}\cdot\text{s}\cdot\text{Bq}} \right] = \left[\frac{\text{Cm}^2}{\text{kg}} \right]$. \dot{X}_0 је функција од времена пошто активност извора опада $\dot{X}(t) = C \frac{A(t)}{r^2}$, тј. $\dot{X}(t) = C \frac{A_0 e^{-\lambda t}}{r^2}$. Како је $X(t) = X_0 e^{-\lambda t}$, експозициона доза износи $X = \int_0^t X_0 e^{-\lambda t} dt$, тј. $X = \dot{X}_0 \lambda^{-1} (1 - e^{-\lambda t})$, одакле је

$$X = 0,38 \mu\text{C}/\text{kg}.$$

б) Експозициона доза је $X = \frac{Q}{m} = \frac{ne \omega_j}{m \omega_j} = \frac{E e}{m \omega_j} = D\alpha^{-1}$, где је $X = \frac{D}{\alpha}$, тј.

$$D = X\alpha = \int_0^t \dot{X} dt \alpha = \int_0^t \dot{X}_0 e^{-\lambda t} \alpha dt,$$

$$\frac{D}{\alpha \dot{X}_0} = -\lambda^{-1} e^{-\lambda t} \Big|_0^t,$$

$$\frac{\lambda D}{\alpha \dot{X}_0} = 1 - e^{-\lambda t}, \text{ одакле се добија}$$

$$t = -\frac{1}{\lambda} \ln \left(1 - \frac{\lambda D}{\alpha \dot{X}_0} \right) \approx 122,6 \text{ s}.$$

Задатак 2.25

Колимисан сноп γ -гама зрачења енергије 2 MeV пада нормално на оловну плочу дебљине $d = 7,5 \text{ cm}$. Наћи јачину апсорбоване дозе D у олову у близини тачке изласка снопа из оловне плоче, ако јачина експозиционе дозе на месту уласка снопа износи $\dot{X}_0 = 0,45 \text{ nC} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$. Средњи јонизациони потенцијал по јединици наелектрисања у ваздуху износи $\alpha = 34 \text{ J} \cdot \text{C}^{-1}$. Линеарни коефицијент слабљења уског снопа γ -кваната у олову је $\mu = 0,525 \text{ cm}^{-1}$, $\tau/\rho = 0,0253 \text{ cm}^2 \cdot \text{g}^{-1}$ и $\tau'/\rho' = 0,0235 \text{ cm}^2 \cdot \text{g}^{-1}$ су масени коефицијенти апсорпције енергије γ -зрачења у олову и ваздуху, респективно.

Решење

Јачина дозе износи:

$$\dot{D} = \alpha \frac{\tau/\rho}{\tau'/\rho'} \dot{X}_0 \exp(-\mu d) = 1,53 \text{ nGy} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Задатак 2.26

У центру сферног контејнера од олова, чији је спољашњи полупречник $r = 10\text{cm}$ налази се тачкасти извор гама зрачења активности $A = 4\text{MBq}$. Наћи минималну дебљину зида сферног контејнера Δr при којој јачина експозиционе дозе, са спољашње стране, не прелази $\dot{X} = 0,2\text{nC/kg}\cdot\text{s}^{-1}$. Енергија гама зрачења је $1,5\text{MeV}$, при чему је број гама кваната који се емитује по једном акту распада, односно принос $\eta = 0,75$. Линеарни коефицијент апсорпције енергије гама зрачења у олову износи $\tau = 0,318\text{cm}^{-1}$, $\alpha = 34\text{J}\cdot\text{C}^{-1}$, док масени коефицијент апсорпције зрачења у ваздуху има вредност $\tau'/\rho' = 0,0256\text{cm}^2\cdot\text{g}^{-1}$.

Решење

Дебљина зида износи:

$$\Delta r = \frac{1}{\tau} \ln \frac{\tau'/\rho' \cdot A \eta E}{4\pi r^2 \dot{X} \alpha} = 0,5\text{cm}.$$

Задатак 2.27

Сноп гама кваната, енергије $1,5\text{MeV}$, има у тачки A густину флукса $\phi = 5,5 \cdot 10^4\text{cm}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}$. Масени коефицијенти апсорпције енергије гама зрачења τ/ρ , за ваздух и воду, износе $0,0256\text{cm}^2\cdot\text{g}^{-1}$ и $0,0283\text{cm}^2\cdot\text{g}^{-1}$, респективно. Израчунати:

- јачину апсорбоване дозе \dot{D} у тачки A .
- јачину експозиционе дозе \dot{X} у тачки A .

Тачка A налази се: 1) у ваздуху, 1) у води, при чему је $\alpha = 34\text{J}\cdot\text{C}^{-1}$ за ваздух, односно $\alpha = 37,24\text{J}\cdot\text{C}^{-1}$ за воду.

Решење

- $\dot{D} = \frac{\tau}{\rho} \phi E$, при чему се за ваздух добија:

$$\text{а) } \dot{D} = 0,34\mu\text{Gy}\cdot\text{s}^{-1},$$

а за воду:

$$\text{б) } \dot{D} = 0,37\mu\text{Gy}\cdot\text{s}^{-1}.$$

б) $\dot{X} = \frac{\dot{D}}{\alpha}$, за воду, па се добија:

$$1) \dot{X} = \frac{\dot{D}}{\alpha} = \frac{0,34 \mu\text{Gy} \cdot \text{s}^{-1}}{34 E} \cong 10 \text{nC} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$2) \dot{X} = \frac{\dot{D}}{\alpha} = \frac{0,37 \mu\text{Gy} \cdot \text{s}^{-1}}{37,24 \text{J/C}} \cong 10 \text{nC} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Задатак 2.28

Тачкасти радиоактивни извор, чија је активност $A = 3,7 \cdot 10^9 \text{Bq}$, емитује гама зрачење енергије $E = 1 \text{MeV}$. При једном распаду емитује се $\eta = 0,65$ гама кванта. Израчунати јачину експозиционе дозе \dot{X} на растојању $r = 1 \text{m}$ од извора, ако се занемари апсорпција у ваздуху. Масени коефицијент апсорпције енергије гама зрачења $E = 1 \text{MeV}$ у ваздуху износи $\tau/\rho = 0,028 \text{cm}^2 \cdot \text{g}^{-1}$, док је средњи јонизациони потенцијал по јединици наелектрисања $\alpha = 34 \text{J} \cdot \text{C}^{-1}$.

Решење

Јачина експозиционе дозе износи:

$$\dot{X} = \frac{\dot{D}}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \frac{(\tau/\rho) A \eta E}{4\pi r^2} = 25,25 \mu\text{C} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Задатак 2.29

Алфа честица се креће у лопти испуњене ваздухом радијуса $r = 2 \text{cm}$ и пређе пут до заустављања од $R = 0,5 \text{cm}$. Израчунати експозициону дозу, ако је густина вадуха $\rho = 1,2 \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$ и ако се зна да је енергија јонизације ваздуха

$$w = 34 \frac{\text{eV}}{\text{jp}}.$$

Решење

Енергија α честице износи $E = \left(\frac{R}{0,325} \right)^{2/3} = 1,33 \text{ MeV}$. Број јонских парова притом формиран је $n = \frac{E}{w} \cong 40000$. Формирана количина наелектрисања износи $Q = ne = 6,25 \cdot 10^{-15} \text{ C}$, $m = \rho V = \rho \cdot \frac{4}{3} r^3 \pi = 40,19 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$, па је експозициона доза:

$$X = \frac{Q}{m} = 1,55 \cdot 10^{-13} \frac{\text{C}}{\text{kg}}.$$

Задатак 2.30

Јачина експозиционе дозе гама зрачења је $\dot{X}_1 = 21,5 \cdot 10^9 \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ на растојању $l_1 = 10 \text{ cm}$ од тачкастог извора енергије 3 MeV . Коefицијент слабљења олова за ову енергију је $0,468 \text{ cm}^{-1}$.

а) Израчунати растојање l_2 (тзв. безбедно растојање) од извора, на коме јачина експозиционе дозе износи $0,18 \cdot 10^{-9} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$,

б) Проценити дебљину заштитног екрана од олова да би на растојању $l_3 = 1 \text{ m}$ јачина експозиционе дозе износила $\dot{X}_3 = 0,18 \cdot 10^{-9} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$.

Решење

а) Однос јачина експозиционих доза је обрнуто пропорционалан квадрату растојања од тачкастог извора, тј.:

$$\frac{\dot{X}_1}{\dot{X}_2} = \frac{l_2^2}{l_1^2} = 10^{-2},$$

$$l_2^2 = 100 \cdot \frac{\dot{X}_1}{\dot{X}_2} = 34,5 \text{ m}$$

б) Дебљина оловног екрана, која је потребна да се смањи доза примарног зрачења се рачуна по формули:

$$x_{pb} = \frac{1}{\mu} \ln \frac{\dot{X}_{03}}{\dot{X}_3} = 15,13 \text{ cm}.$$

3 АПСОРПЦИЈА ЗРАЧЕЊА

Када сноп γ зрачења пролази кроз материју, његов интензитет опада услед апсорпције. При апсорпцији γ зрачења дешавају се различити ефекти, али је сам процес увек резултат међусобног дејства између γ кванта и атома. Један γ квант може да прође непромењен кроз материју али увек постоји вероватноћа да ступи у интеракцију са неким атомом и да притом буде апсорбован. При апсорпцији γ зрачења се смањује број γ – кванта док њихова енергија остаје непромењена.

Вероватноћа апсорпције γ зрачења је сразмерна дебљини слоја x , а коефицијент пропорционалности се зове линеарни коефицијент слабљења зрачења и обележава се са μ . Ако са I обележимо интензитет зрачења, онда ће при проласку кроз слој материјалне дебљине dx , I опасти за dI :

$$dI = -\mu \cdot I \cdot dx.$$

Интеграцијом овог израза добија се закон апсорпције. Уколико се са I_0 означи почетни интензитет зрачења, закон добија облик:

$$I = I_0 e^{-\mu x}.$$

Вредност коефицијента апсорпције се мења са таласном дужином зрачења. Ако се сноп састоји из више таласних дужина, за сваку компоненту зрачења једне таласне дужине примењује се дат закон.

Линеарни коефицијент представља суму три коефицијента који се односе на фотоэффект, Комптоново расејање и процес производње парова:

$$\mu = (\tau + \sigma_c + \kappa) \cdot N,$$

где је N број атома мете по јединици запремине. Јединица линеарног коефицијента слабљења је m^{-1} . Сам коефицијент слабљења је збир коефицијента апсорпције μ_a (апсорпциони процеси су фотоэффект и производња парова) и коефицијента расејања μ_s (Комптонов ефект је расејавајући процес):

$$\mu = \mu_a + \mu_s.$$

Поред линеарног коефицијента слабљења у употреби је и масени коефицијент слабљења који је дат као:

$$\mu_m = \frac{\mu}{\rho},$$

где је ρ густина материјала. Масени коефицијенти се користе знатно више од линеарних, јер је на датој енергији зрачења он независан од физичког стања материје (за воду μ_m је исто без обзира на агрегатно стање материје, што није случај са линеарном коефицијентом). Јединица за масени коефицијент слабљења је $m^2 kg^{-1}$.

Масени коефицијент смеше или једињења се може добити преко Браговог сумационог правила:

$$\frac{\mu}{\rho} = \sum_i \omega_i \left(\frac{\mu}{\rho} \right)_i,$$

где је са i означена i -та материја, а ω_i је њен масени удео у смеси. Коефицијент апсорпције зависи од материјала кроз који се зрачење простира.

Задатак 3.1

Тачкасти радиоактивни извор ^{60}Co налази се у центру сферног контејнера од олова, чија је дебљина зидова једнака $x=1cm$ и спољашњи полупречник $R=20cm$. Одредити максималну активност извора A_{max} , који се може чувати у датом контејнеру, ако је дозвољена вредност густине флукса ϕ_d фотона при изласку из контејнера $8 \cdot 10^6 s^{-1}m^{-2}$. Претпоставити да се при сваком акту распада језгра ^{60}Co емитују $\eta=2$ γ - фотона, чија је средња енергија $E=1,25MeV$. Линеарни коефицијент слабљења μ за фотоне енергије $\varepsilon=1,25MeV$ је $0,65cm^{-1}$.

Решење

Број фотона γ - зрачења који се емитује у целокупном простору (тј у 4π) је

$F = A \cdot \eta$, где је η - број γ - фотона, који се емитују при једном акту распада:

$$A = \frac{F}{\eta}.$$

Флукс F може се изразити преко густине флуksа; густина флуksа на растојању R од тачкастог извора зрачења је:

$$\phi_1 = \frac{F}{4\pi R^2}$$

$$\phi_1 = \frac{\Phi}{4\pi R^2}.$$

После проласка зрачења кроз оловни зид контејнера, густина флуksа се смањује и изражава се формулом:

$$\phi_2 = \phi_1 e^{-\mu x}$$

Комбиновањем ове две формуле добија се израз за флуks, ϕ

$$\phi = 4\pi R^2 \phi_2 e^{\mu x}.$$

Замењујући израз за флуks у формулу за активност, добија се:

$$A = \frac{4\pi R^2 \phi_2 e^{\mu x}}{n}.$$

Ако се у добијеној формули ϕ_2 замени са ϕ_d , под претпоставком $\phi_2 = \phi_d$, добијена формула за активност изражава тражену максималну активност извора који се може чувати у контејнеру:

$$A_{\max} = \frac{4\pi R^2 \phi_d e^{\mu x}}{n},$$

$$A_{\max} = \frac{4\pi \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 8 \cdot 10^6 e^{0,641}}{2} s^{-1} = 3,81 \text{ MBq}.$$

Задатак 3.2

Израчунати дебљину оловног заклона ако треба снизити интензитет γ зрачења $125 \cdot 10^6$ пута. Слој дебљине полуслабљења је $d_{1/2} = 0,013 \text{ m}$.

Решење

$$I = I_0 e^{-\mu x}$$

$$k = \frac{I_0}{I} = e^{\mu x} = 2^n,$$

где је n број слојева дебљине полуслабљења:

$$n = \log_2 k$$

При грубим прорачунима узима се да је $2^{10} \cong 1000$ одакле следи $2^{20} = 10^6$ $2^7 = 128$, па се може узети да је $2^7 \approx 125$. Процењује се да је број слојева дебљине полуслабљења $n = 20 + 7 = 27$, а одговарајућа дебљина заштите је $x = n \cdot d_{1/2}$, тј. $n = 27 \cdot 0,013\text{m} = 0,351\text{m}$.

Задатак 3.3

Моноенергетско гама зрачење енергије 450 keV се апсорбује у $\text{NaI}(\text{Tl})$ кристалу, чија је ефикасност 12%. 75% сцинтилационих фотона, који имају просечну енергију од 2,8eV, достигне фотомултипликатор, где се 20% инцидентних фотона претвара у фотоелектроне. Претпоставити да су варијације у висини импулса од различитих гама фотона у потпуности последица статистичких флукуација у броју видљивих фотона по импулсу, који достижу катоду.

- Израчунати просечан број сцинтилационих фотона произведених по апсорбованом гама фотону;
- Колико фотоелектрона се произведе, усредњено, по једном гама фотону?
- Која је средња енергија која је утрошена инцидентним фотоном како би се произвео фотоелектрон из катоде фотомултипликаторске цеви ("W вредност")?
- Упоредите ову вредност са средњом енергијом потребном за производњу јонског пара у гасу или полупроводнику.

Решење

- Укупна енергија видљиве светлости произведена са 12% ефикасности је $450\text{keV} \cdot 0,12 = 54\text{keV}$. Просечан број сцинтилационих фотона је стога $54000 / 2,8 = 19300$;
- Средњи број фотона који достижу катоду фотомултипликатора је $0,75 \cdot 19300 = 14500$,
те је просечан број фотоелектрона $0,20 \cdot 14500 = 2900$;
- Од једног гама фотона од 450 keV производи се 2900 фотоелектрона који иницирају сигнал, а "W вредност" за сцинтилатор је $450000\text{eV} / 2900$, тј. $155\text{eV} / \text{фотоелектрона}$.
- За гасове, $W \approx 30\text{eV} / \text{јп}$, тако да би средњи број електрона насталих апсорпцијом фотона био око $450000\text{eV} / 30\text{eV} = 15000$; за полупроводник,

$W \approx 3\text{eV/jp}$, а одговарајући број електрона је 150.000. "W вредност" од неколико стотина eV по електрону произведеном на фотокатоде је типична за сцинтилационе детекторе.

Задатак 3.4

При проласку кроз плочу од сребра чија је дебљина 2mm уски сноп гама зрачења енергије 0,15MeV ослаби 4 пута. Одредити ефикасни пресек интеракције, ако је $\rho = 10,5\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$ а атомска маса сребра $A = 107,8$.

Решење:

На основу закона слабљења интензитета зрачења $I = I_0 e^{-\mu x}$, добија се

$$\mu = \frac{1}{x} \ln \frac{I_0}{I}.$$

Линеарни коефицијент апсорпције је повезан са ефикасним пресеком интеракције:

$$\mu = \sigma \cdot N,$$

одакле се добија ефикасни пресек интеракције:

$$\sigma = \frac{\mu}{N},$$

где је број атома мете, који се одређује преко масеног броја, густине и Авогадровог броја:

$$N = \frac{N_{Av} \cdot \rho}{A}.$$

Коначан резултат за ефикасни пресек интеракције је:

$$\sigma = 120 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2.$$

Задатак 3.5

Израчунати колико пута ће се повећати интензитет зрачења на рачун расејања при проласку γ -зрачења од тачкастог изотропног извора са енергијом 1MeV, ако је извор постављен у слој воде, дебљине $x = 28,3\text{cm}$ и ван ње. Линеарни коефицијент слабљења за дату енергију и средину је $\mu = 0,0706 \text{ cm}^{-1}$.

а) у случају бесконачне геометрије (фактор нагомилавања за вредност $\mu x = 2$ износи $B_{\infty}^D = 3,71$);

б) у случају баријерне геометрије (за енергију од 1MeV ако је тачкасти изотропни извор у води, поправка за баријерну геометрију износи $\delta_D = 0,797$).

Решење:

а) у случају бесконачне геометрије потребно је одредити фактор нагомилавања B_∞^D

Фактор нагомилавања зависи од производа μx и зато је потребно прво одредити тај производ, $\mu x = 0,0706 \text{ cm}^{-1} \cdot 28,3 \text{ cm} = 2$. На основу поставке задатка $B_\infty^D = 3,71$. У случају бесконачне геометрије интензитет зрачења се повећава 3,71 пута.

б) у случају баријерне геометрије потребно је одредити фактор нагомилавања B_δ^D , при чему је $B_\delta^D = \delta_D \cdot B_\infty^D$, где је δ_D поправка. За енергију од 1MeV ако је тачкасти изотропни извор у води, поправка износи $\delta_D = 0.797$, при чему је:

$$B_\delta^D = \delta_D \cdot B_\infty^D = 0,797 \cdot 3,71 = 2,96$$

У баријерној геометрији интензитет зрачења се повећа 2,96 пута.

$$I = I_0 \delta_D B_\infty^D e^{-\mu x} .$$

Задатак 3.6

Изрaчунати јачину експозиционе дозе на растојању 1m од тачкастог изотропног извора ^{60}Co , активности $3,7 \cdot 10^{10}$ Bq. За колико ће се смањити јачина експозиционе дозе, ако се извор обавије оловом дебљине 5cm? Енергије фотона као и масени коефицијенти слабљења ваздуха за енергију датог извора су: $h\nu_1 = 1,17 \text{ MeV}$ и $h\nu_2 = 1,33 \text{ MeV}$, $\frac{\mu_{en}}{\rho} = \mu_{en_1} = 2,65 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{kg}$, $\mu_{en_1} = 2,55 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{kg}$. Користити следеће податке за линеарне коефицијенте слабљења, а затим на основу њих вредности за факторе нагомилавања за дате енергије:

$$h\nu_1 = 1,17 \text{ MeV} \quad \mu_1 = 0,714 \text{ cm}^{-1} \quad \mu_1 r = 3,57 \quad B = 2,18 ,$$

$$h\nu_2 = 1,33 \text{ MeV} \quad \mu_2 = 0,646 \text{ cm}^{-1} \quad \mu_2 r = 3,23 \quad B = 2,1 .$$

Решење

Прорачун јачине експозиционе дозе се може поделити у два корака: у првом кораку се израчуна густина флукса честица ϕ у тачки од интереса; у другом кораку се добијени резултат преводи у јачину експозиције.

За тачкасти извор у ваздуху густина флукса честица на растојању r ће бити:

$$\phi = B \cdot S \frac{e^{-\mu r}}{4\pi r^2},$$

где је B - фактор нагомилавања; S јачина извора, тј. број фотона у јединици времена који емитује извор; μ - линеарни коефицијенти слабљења ваздуха за енергију датог извора.

Јачина експозиционе дозе се може добити из једначине:

$$\dot{X} = \frac{h\nu\phi}{E_f},$$

где је $h\nu$ - енергија фотона; E_f - инцидентни ток енергије по јединици експозиционе дозе; ако се E_f помножи са $\frac{\mu_{en}}{\rho}$ (масени коефицијент апсорпције енергије за ваздух), добија се енергетски еквивалент јединице експозиционе дозе.

Да би у ваздуху експозициона доза износила 1C/kg мора се на јонизацију утрошити $33,84 \frac{\text{J/kg}}{\text{C/kg}}$,

$$E_f \cdot \frac{\mu_{en}}{\rho} = 33,84 \frac{\text{J/kg}}{\text{C/kg}},$$

$$\dot{X} = \frac{1}{33,84} h\nu \left(\frac{\mu_{en}}{\rho} \right) \cdot \phi.$$

Често се $h\nu$ изражава у MeV, па се употребљава следећа формула за јачину експозиционе дозе:

$$\dot{X} = 4,8 \cdot 10^{-15} h\nu \left(\frac{\mu_{en}}{\rho} \right) \cdot \phi$$

а) На основу познате активности одреди се јачина извора S , тј. број фотона у јединици времена који даје извор:

$$S = 3,7 \cdot 10^{10} \frac{\text{расп.}}{\text{s}}, \quad r = 1 \text{ m}.$$

За тачкасти извор у ваздуху густина флукса честица на растојању r ће бити:

$$\phi = \frac{S e^{-\mu r}}{4\pi r^2},$$

где је $e^{-\mu r} \approx 1$, одакле следи да је

$$\phi = \frac{3,7 \cdot 10^{10} \text{ phot.}}{12,56 \text{ m}^2 \cdot \text{s}} = 2,94 \cdot 10^9 \frac{\text{phot.}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}}$$

Јачина експозиционе дозе се може добити из једначине:

$$\dot{X} = \frac{h\nu\phi}{E_f}, \text{ па је}$$

$$\dot{X} = 4,8 \cdot 10^{-15} (1,17 \cdot 2,65 + 1,33 \cdot 2,55) \cdot 10^{-3} \cdot 2,94 \cdot 10^9 \frac{\text{C}}{\text{kg} \cdot \text{s}},$$

$$\dot{X} = 9 \cdot 10^{-9} \frac{\text{C}}{\text{kg} \cdot \text{s}}.$$

б) У овом случају се мора урачунати слабење (тј. $e^{-\mu r} \neq 1$) и нагомилавање зрачења (тј. $B \neq 1$),

$$\phi = B \cdot S \frac{e^{-\mu r}}{4\pi r^2},$$

$$\phi_1 = 2,18 \cdot 3,7 \cdot 10^{10} \frac{e^{-3,57}}{12,56 \text{ m}^2 \cdot \text{s}} = 1,81 \cdot 10^8 \frac{\text{phot.}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}},$$

$$\phi_2 = 2,1 \cdot 3,7 \cdot 10^{10} \frac{e^{-3,23}}{12,56 \text{ m}^2 \cdot \text{s}} = 2,45 \cdot 10^8 \frac{\text{phot.}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}}.$$

Одговарајуће јачине експозиције су:

$$\dot{X}_1 = 4,18 \cdot 10^{-15} \cdot 1,17 \cdot 1,81 \cdot 10^8 \cdot 2,65 \cdot 10^{-3} \frac{\text{C}}{\text{kg} \cdot \text{s}} \approx 2,6 \cdot 10^{-9} \frac{\text{C}}{\text{kg} \cdot \text{s}},$$

$$\dot{X}_2 = 4,18 \cdot 10^{-15} \cdot 1,33 \cdot 2,45 \cdot 10^8 \cdot 2,55 \cdot 10^{-3} \frac{\text{C}}{\text{kg} \cdot \text{s}} \approx 4 \cdot 10^{-9} \frac{\text{C}}{\text{kg} \cdot \text{s}}.$$

Укупна јачина експозиционе дозе је:

$$\dot{X} = \dot{X}_1 + \dot{X}_2 = 6,6 \cdot 10^{-9} \frac{\text{C}}{\text{kg} \cdot \text{s}},$$

што значи да се јачина дозе смањила за

$$\dot{X} = (9 - 6,6) \cdot 10^{-9} \frac{\text{C}}{\text{kg} \cdot \text{s}}, \text{ тј.}$$

$$\dot{X} = 2,4 \cdot 10^{-9} \frac{\text{C}}{\text{kg} \cdot \text{s}}.$$

Задатак 3.7

Ефикасни пресек за апсорпцију фотона фотоефектом брзо опада са енергијом. Са порастом енергије, постаје значајно уклањање фотона из упадног снопа расејањем на слободним електронима (Комптоново расејање). На ниским енергијама ($h\nu \ll mc^2$) процес расејања се описује класично (Томпсоново расејање). Претпоставити да раван линеарно поларизован талас пада на слободан електрон, који под дејством електричног вектора осцилује и емитује енергију брзином:

$$I = \frac{dE}{dt} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} a^2,$$

где је a убрзање електрона. Одредити Томпсонов пресек по електрону за овакав процес.

Решење

Сила је једнака електричној сили:

$$m\vec{a} = e\vec{E},$$

одакле је убрзање електрона:

$$\vec{a} = \frac{e\vec{E}}{m}.$$

Средња израчена снага електрона је:

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \frac{2}{3} \frac{e^4}{c^3 \cdot m^2} \langle E^2 \rangle$$

Упадни талас има интензитет:

$$I_0 = \frac{c}{4\pi} \langle E^2 \rangle$$

Ефикасни пресек по електрону представља производ површине и интензитета упадног таласа на ту површину, под претпоставком да је сва енергија која упадне на површину σ_T апсорбована, па поново израчена у просторни угао 4π :

$$\sigma_T \cdot I_0 = \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle,$$

$$\sigma_T = \frac{\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle}{I_0} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} r_e^2 = 0,657 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2 = 0,66 \text{ barn}.$$

где је $r_e = 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$ класични радијус електрона. Ефикасни пресек не зависи од енергије фотона, што је у супротности с експерименталним резултатима.

Задатак 3.8

Тачкасти извор монохроматског гама зрачења налази се у центру сферног слоја олова, чији је спољашњи полупречник 6 cm, а дебљина 4 cm. Активност извора износи $0,5 \cdot 3,7 \cdot 10^7 \text{ Bq}$ (по једном распаду емитује се један гама квант). Енергија гама кваната је 1 MeV, а дебљина полуапсорпције олова за ову енергију је 0,877 cm. Одредити густину флукса нерасејаних гама кваната на спољашњој површини оловног екрана.

Решење:

Флукс представља број гама кваната по јединичној површини у јединици времена:

$$\phi = \frac{I}{4\pi r^2},$$

где је I број нерасејаних гама кваната који у једној секунди прођу кроз спољашњу површину оловног екрана, а r спољашњи полупречник тог екрана. Користећи закон слабљења снопа гама зрачења, добија се флукс:

$$I = I_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{d_{1/2}} x},$$

$$\phi = \frac{I_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{d_{1/2}} x}}{4\pi r^2} = 1,73 \cdot 10^3 \text{ cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}.$$

где је I_0 број гама кваната које емитује извор у једној секунди, $d_{1/2}$ је дебљина полуапсорпције, а x је дебљина оловног апсорбера.

Задатак 3.9

Из једног извора емитују се две групе гама кваната различитих енергија, при чему се дебљине полуапсорпција ових зрачења односе као 1:2. Оба зрачења су приближно истог интензитета. Одредити релативне интензитета ових зрачења после проласка кроз апсорбере, чије су дебљине $1, 2, 3, \dots, n$ дебљина полуапсорпције продорног зрачења.

Решење:

Интензитети зрачења I_1 и I_2 после проласка кроз апсорбер дебљине x су:

$$I_1 = I_{01} \cdot e^{-\mu_1 x} = I_{01} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{d_1/2} x} = I_{01} \cdot 2^{-\frac{x}{d_1}} \text{ и}$$

$$I_2 = I_{02} \cdot e^{-\mu_2 x} = I_{02} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{d_2/2} x} = I_{02} \cdot 2^{-\frac{x}{d_2}},$$

где су: $\mu_i (i=1,2)$ коефицијент слабљења, а $d_i (i=1,2)$ дебљина полуапсорпције. Према условима задатка оба зрачења су приближно истог интензитета, тј. $I_{01} \cong I_{02}$, а дебљине полуапсорпција ових зрачења се односе као 1:2, тј. $d_2 = 2d_1$ па се за однос интензитета добија:

$$\frac{I_1}{I_2} = 2^{-x \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right)},$$

$$\frac{I_1}{I_2} = 2^{-\frac{x}{2d_1}}.$$

Израз $\frac{I_1}{I_2}$ представља релативни интензитет зрачења.

За вредност дебљине апсорбера $x = d_1$, релативни интензитет је:

$$\frac{I_1}{I_2} = 2^{-\frac{x}{2d_1}} = 2^{-\frac{d_1}{2d_1}} = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

За вредност дебљине апсорбера $x = 2d_1$, релативни интензитет је:

$$\frac{I_1}{I_2} = 2^{-\frac{x}{2d_1}} = 2^{-\frac{2d_1}{2d_1}} = 2^{-\frac{2}{2}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{(\sqrt{2})^2}.$$

За вредност дебљине апсорбера $x = nd_1$, релативни интензитет је:

$$\frac{I_1}{I_2} = 2^{-\frac{x}{2d_1}} = 2^{-\frac{nd_1}{2d_1}} = 2^{-\frac{n}{2}} = \frac{1}{(\sqrt{2})^n}.$$

Задатак 3.10

Запреминска активност ^{137}Cs , у ваздуху измерена изнад океана, износи $9 \cdot 10^{-6} \text{ Bq} \cdot \text{m}^{-3}$. Одредити годишњу вредност флуенса услед спољашњег озрачивања човека, који се налази на површини океана (на пр. на броду) од γ -зрачења ^{137}Cs у ваздуху. Занемарити расејано зрачење у ваздуху. Линеарни коефицијент апсорпције за ваздух од гама зрачења енергије 661,6 keV (емитује ^{137}Cs са приносом 0,851) је $\mu = 0,038 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$.

Решење

За бесконачно полупространство, као што је ваздух, густина флукса се израчунава на основу формуле:

$$\phi = \frac{q_V}{2\mu},$$

$$\phi = \frac{q_V}{2\mu} = \frac{\eta \cdot A}{2\mu} = \frac{0,851 \cdot 9 \cdot 10^{-6} \text{ Bq/m}^3}{2 \cdot 0,00381/\text{m}} = 10,05 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{m}^2 \cdot \text{s}}.$$

Годишња вредност флуенса је:

$$\phi_G = 10,05 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{m}^2 \cdot \text{s}} \cdot 31,536 \cdot 10^6 \text{ s} = 31,69 \cdot 10^3 \text{ m}^{-2}.$$

4 ДЕТЕКЦИЈА ЗРАЧЕЊА И СТАТИСТИКА

Детекција јонизујућег зрачења заснива се на ефектима које зрачење производи при проласку кроз средину. Детекторе је могуће класификовати на више различитих начина; а) према агрегатном стању радног материјал; б) према типу излазног сигнала који детектор генерише; в) према механизму интеракције зрачења са активном запремином детекторског материјала.

Преама агрегатном стању постоје гасни детектори, детектори у чврстом стању и течни.

Код **гасних детектора**, радни материјал је у гасној фази. Рад гасних детектора се заснива на **јонизацији** атома и молекула гаса и одвајању позитивног и негативног наелектрисања. Одвајање се обавља применом јаког електричног поља. У ову групу детектора убрајају се: јонизациона комора, пропорционални бројач и Гајгер-Милеров бројач.

У **чврстом стању** постоји више различитих типова детектора. Најважнији међу њима су сцинтилациони детектори, полупроводнички детектори, термолуминисцентни, чврсти траг детектори и др.

Као полупроводнички детектор користе се диоде направљене од Ge или Si. Активна запремина **полупроводничких детектора** је прелазна област p-n споја, у којој јонизацијом настају парови електрон-шупљина. Њиховим кретањем у електричном пољу настаје основни електрични сигнал детектора који се даље појачава.

У основи рада **сцинтилационих детектора** је појава **флуоресценције**, тј. емисије светлосних кваната при деексцитацији побуђених стања молекула, насталих интеракцијом са јонизујућим зрачењем. Применом фотомултипликатора, емитовани светлостни сигнал се преводи у електрични.

Чврсти траг детектори су материјали у којима тешке наелектрисане честице остављају тзв. латентне трагове, тј., просторно корелисана оштећења, тј., траг честице. Овај траг се може визуелизовати, односно повећати одговарајућим хемијским третманом.

Термолуминисцентни детектори, уместо тренутне емисије светлости, као у случају сцинтилационих детектора, акумулирају енергију примљену интеракцијом са зрачењем у виду везаних побуђених стања електрона и ослобађају је као светлосни сигнал тек при загревању.

У **течној** фази постоје сцинтилациони детектори и принцип рада је исти као и код сцинтилационих детектора у чврстој фази.

Према типу излазног сигнала детекторе се могу поделити у: импулсне бројаче, струјне, спектрометре, и др.

Постоје детектори који се не уклапају у ни једну од побројаних група.

Черенковљеви детектори заснивају се на емисији плавичасте светлости при проласку брзе наелектрисане честице кроз оптички транспарентну средину чији је индекс преламања већи од 1.

Маглена комора се могу убројити у гасне, али је принцип рада другачији; заснива се на кондензовању паре дуж путање јонизујуће честице која пролази кроз презасићену смешу гаса и паре. Код **мехурасте коморе** смеша гаса и паре замењена је прегрејаном течномештом, у којој долази до појаве мехура при проласку честице.

У **варничној комори** јонизујућа честица пролази кроз танке, паралелне металне плоче, поређане у посуди, која је испуњена племенитим гасом. Импулс високог напона који се доводи на плоче ствара лавину електрона дуж путање јонизујуће честице и образује светлу варницу.

Фотографске емулзије (филмови) су сличне траг детекторима, али је механизам формирања и обраде трагова другачији. Јонизујуће зрачење интеракцијом са атомима сребро бромида емулзије ствара зрна побуђена зрачењем, која после развијања филма приказују путању честице.

Јонизациона комора, пропорционални бројач, Гајгер-Милеров бројач, полупроводнички, термолуминисцентни, сцинтилациони и Черенковљеви детектори сврставају се у **детекторе електричног типа**. Маглена комора, мехураста комора, варнична комора и фотографске емулзије су **детектори визуелног типа**.

Спектрометрима се називају уређаји за мерење енергије јонизујућег зрачења и идентификацију радионуклида. Многи од наведених врста детектора се могу користити као спектрометри. Посебно су значајни гама-спектрометри, који имају велику примену у науци, техници и медицини.

Неутрони захтевају посебне методе детекције и спектрометрије. **Детектори спорих неутрона** користе нуклеарне реакције чији су производ наелектрисане честице, које је могуће директно детектовати. **Детекција брзих неутрона** заснована је на еластичном расејању неутрона на језгру (најчешће језгру водоника-протону) као и детекцији узмакнутог језгра.

На основу реверзибилности механизма детекције, детектори могу бити **реверзибилни** (у њима током детекције не настају трајне промене, на пример сцинтилациони), **делимично реверзибилни** (век трајања им је ограничен, на пример Гајгер-Милеров бројач) и **иреверзибилни** (детектори за једнократно коришћење, на пример нуклеарне фотоемулзије).

4.1 ГЕОМЕТРИЈСКА ЕФИКАСНОСТ ДЕТЕКЦИЈЕ

Ефикасност детекције извесног детектора зависи од великог броја фактора. Врста и тип детектора у многоме одлучују какву врсту зрачења је детектор у могућности да региструје. Величина детектора утиче, пре свега на радну запремину, а самим тим и на ефикасност детекције. Једна од карактеристика свих детектора је, да поред осталих параметара, ефикасност детекције зависи и од геометрије извора-детектора. Како би детектор имао што већи геометријску ефикасност битно је да просторни угао под којим се види детектор од стране извора буде што већи. У ту сврху се израђују детектори код којих је стандардизована позиција извора, тј. узорка, и чести су случајеви да се узорак уноси унутар радне запремине детектора.

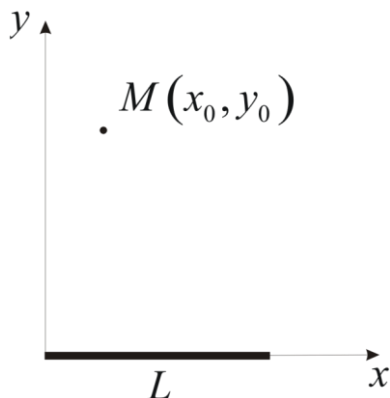
Услучају тачкастог извора геометријска ефикасност елементарне површине детектора износи:

$$\varepsilon_g = \frac{dF}{\eta \cdot A} = \frac{\vec{r} \cdot d\vec{s}}{4\pi r^3},$$

где је dF флукс, тј. број кваната зрачења које доспева до елемента ds у јединици времена, A активност извора, \vec{r} радијус вектор са почетком у тачки извора, а крајем на елементу површине $d\vec{s}$ и η је принос дате врсте зрачења радиоактивног извора.

Задатак 4.1

Дат је радиоактивни извор познате активности A тачки M (Слика 4.1) и приноса γ -линија, η . Одредити укупан број γ -кваната који падају на јединичну ширину детектора. Ширину овог детектора узети јединичном и довољно малом да се може сматрати да је број честица који пада на детектор хомоген по ширини детектора.



Слика 4.1 Слика уз задатак 4.1

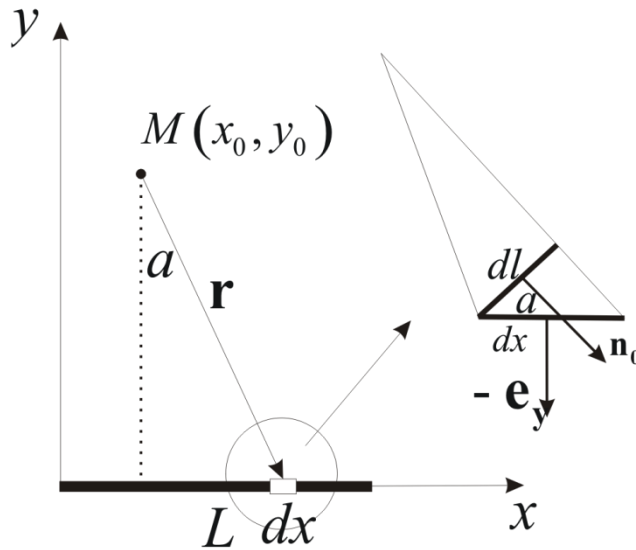
Решење

Флукс тачкастог извора до елемента површине $ds \equiv dl \cdot 1$ (елемент површине дужине dl и јединичне ширине) је дат изразом $dF = \frac{A}{4\pi r^2} \cdot \eta \cdot ds$, где је

$dl = \vec{n}_0 dx \vec{e}_y$, $\vec{n}_0 = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ је орт вектор нормале на линијски елемент. Са слике 4.2

се може видети да је $\cos \alpha = \frac{y}{r}$, па је флукс до линијског елемента

$$dF = \frac{A\eta}{4\pi r^2} \cdot \frac{y_0}{r} dx.$$



Слика 4.2 Слика уз решење задатка 4.1

Укупан флукс добијамо интеграцијом по читавој дужини:

$$F = \frac{A\eta y_0}{4\pi} \int_0^L \frac{dx}{\left[(x-x_0)^2 + y_0^2 \right]^{3/2}}, \text{ тј. } F = \frac{A\eta}{4\pi y_0^2} \int_0^L \frac{dx}{\left[1 + \left(\frac{x-x_0}{y_0} \right)^2 \right]^{3/2}}$$

Интеграл се решава помоћу смене:

$$\frac{x-x_0}{y_0} = t, \quad dx = y_0 dt, \quad t_1 = -\frac{x_0}{y_0} \quad \text{и} \quad t_2 = \frac{L-x_0}{y_0}.$$

$$F = \frac{A\eta}{4\pi y_0} \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{[1+(t)^2]^{3/2}},$$

$$F = \frac{A\eta}{4\pi y_0} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1+t^2-t^2}{[1+(t)^2]^{3/2}} dt,$$

$$F = \frac{A\eta}{4\pi y_0} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1+t^2-t^2}{[1+(t)^2]^{3/2}} dt,$$

$$F = \frac{A\eta}{4\pi y_0} \left[\int_{t_1}^{t_2} \frac{1+t^2}{[1+(t)^2]^{3/2}} dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{t^2}{[1+(t)^2]^{3/2}} dt \right].$$

Решавањем последњег интеграла парцијалном интеграцијом, $t = u$ и

$$\frac{t dt}{(1+t^2)^{3/2}} = dv, \quad \text{добија се:}$$

$$F = \frac{A\eta}{4\pi y_0} \left[\int_{t_1}^{t_2} \frac{1+t^2}{[1+t^2]^{3/2}} dt - \left(t \left(-\frac{1}{[1+t^2]^{1/2}} \right) \right) \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{[1+t^2]^{1/2}} \right].$$

Интеграли у загради се потиру:

$$F = \frac{A\eta}{4\pi y_0} t \frac{1}{[1+t^2]^{1/2}} \Big|_{t_1}^{t_2} = -\frac{A\eta}{4\pi y_0} \left(t_2 \frac{1}{[1+t_2^2]^{1/2}} - t_1 \frac{1}{[1+t_1^2]^{1/2}} \right),$$

$$F = \frac{A\eta}{4\pi y_0} \left(\frac{L-x_0}{y_0} \frac{1}{\left[1+\left(\frac{L-x_0}{y_0}\right)^2\right]^{1/2}} + \frac{x_0}{y_0} \frac{1}{\left[1+\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^2\right]^{1/2}} \right),$$

$$F = \frac{A\eta}{4\pi y_0} \left(\frac{L-x_0}{\sqrt{y_0^2+(L-x_0)^2}} + \frac{x_0}{\sqrt{y_0^2+x_0^2}} \right).$$

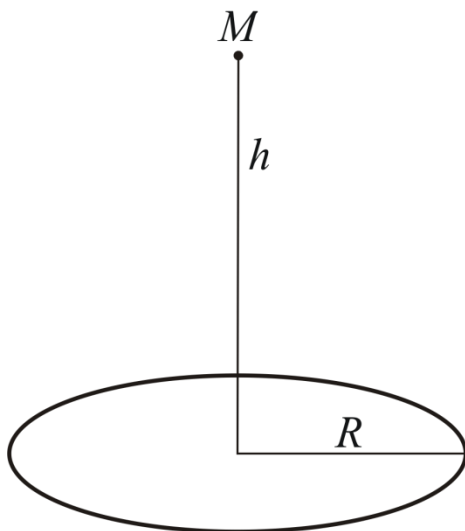
Број честица који падне на детектор је

$$N = F \cdot t ,$$

где је t временски интервал за који је број кваната одређиван.

Задатак 4.2

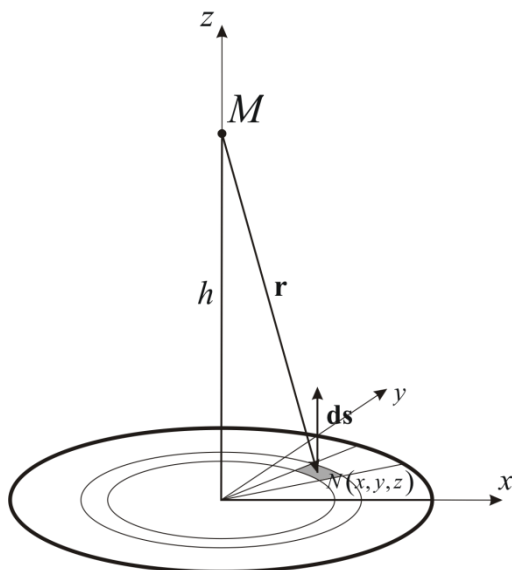
Дат је радиоактивни извор познате активности A , у тачки M , који је чист α -емитер. Одредити број α честица које ће доспети до детектора облика диска, у конфигурацији као на слици 4.3. Између извора и детектора је вакуум.



Слика 4.3 Слика уз задатак 4.2

Решење

Изаберимо један елемент површи $d\vec{s}$ у тачки $N(x, y, z)$, тј. у цилиндричним координатама $N(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, 0)$. Тачка M има координате $M(0, 0, h)$ као на слици 4.4.



Слика 4.4 Слика уз решење задатка 4.3

Радијус вектор од тачке M до тачке N је $\vec{r}(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, -h)$, где притом можемо дефинисати његов јединични вектор:

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{\rho \cos \phi \cdot \vec{e}_x + \rho \sin \phi \cdot \vec{e}_y - h \vec{e}_z}{\sqrt{\rho^2 + h^2}}.$$

Како је $d\vec{s} = -\rho d\rho \cdot d\phi \cdot \vec{e}_z$, можемо писати да је $\vec{n}_0 \cdot d\vec{s} = \frac{h}{\sqrt{\rho^2 + h^2}} ds$.

Флуенс алфа честица који доспева до елемента површине ds детектора је:

$$dF = \frac{A}{4\pi r^2} \vec{n}_0 \cdot d\vec{s},$$

$$dF = \frac{A}{4\pi r^2} \frac{h}{\sqrt{\rho^2 + h^2}} \rho d\rho \cdot d\phi.$$

$$r = \sqrt{\rho^2 + h^2}$$

Укупан флуенс износи:

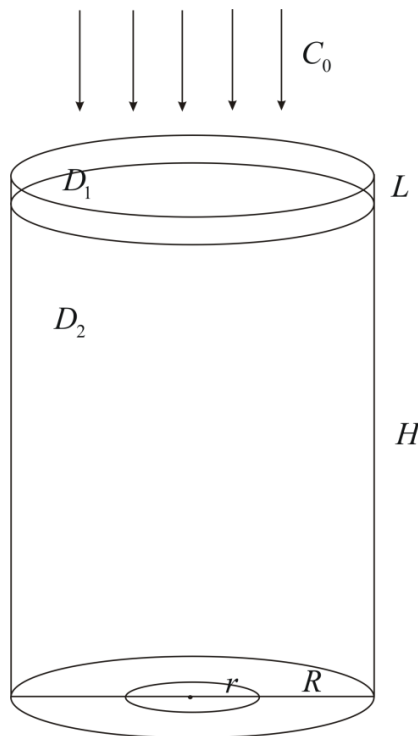
$$F = \int dF = \frac{Ah}{4\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\rho \cdot d\phi}{(\rho^2 + h^2)^{3/2}}, \quad F = \frac{Ah}{4\pi r^2} \cdot 2\pi \int_0^R \frac{1}{2} \frac{d(\rho^2 + h^2)}{(\rho^2 + h^2)^{3/2}},$$

$$F = \frac{Ah}{2} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + h^2}} \Big|_R^0, \text{ Tj.}$$

$$F = \frac{Ah}{2} \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right).$$

Задатак 4.3

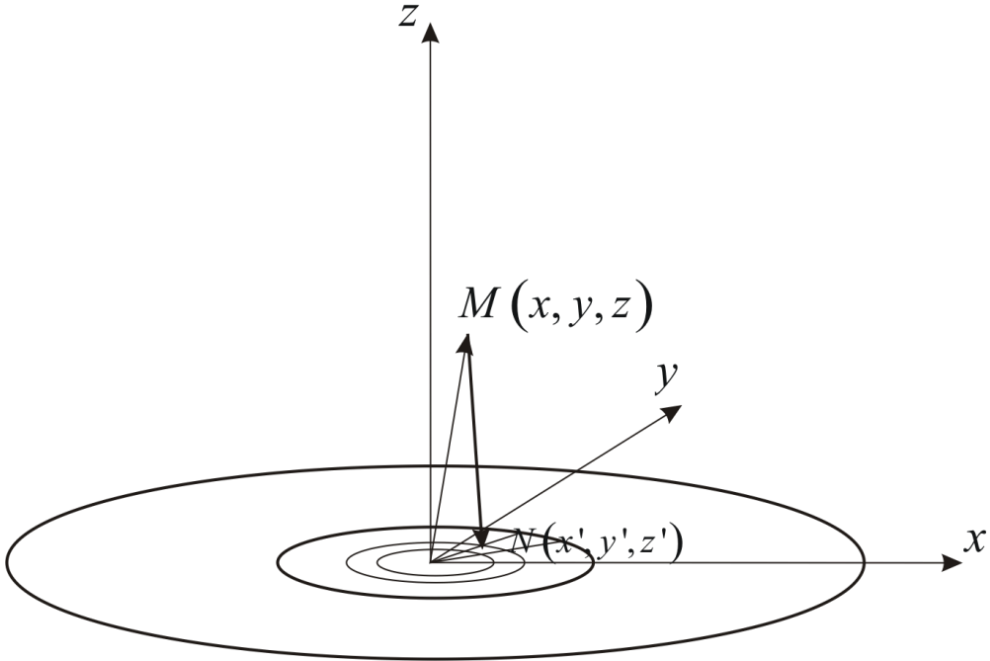
Дифузиона комора облика цилиндра радијуса R и висине H покривена је филтер папиром коефицијента дифузије D_1 и дебљине L . Унутар коморе је ваздух коефицијента дифузије D_2 . Одредити израз за број α честица ^{222}Rn које ће се детектовати на траг детектору облика диска радијуса r , постављеног на дну коморе, тако да се оса диска поклапа са осом коморе. Дамет α честица је R_d , а читава активна запремина детектора је садржана у запремини коморе. ^{222}Rn се не депонује на зидове коморе. Узети да је ван коморе концентрација ^{222}Rn , C_0 , константна и хомогена. Разматрати стационарно стање дифузије. Константа распада ^{222}Rn је λ . Временски зависна једначина дифузије је $\frac{\partial C}{\partial t} = \nabla(D\nabla C) - \lambda C$.



Слика 4.5 Слика уз задатак 4.3

Решење

Процес дифузије концентрације радона из ваздуха у комору се описује диференцијалном једначином дифузије. Процес дифузије се може рашчланити на дифузију у филтер папиру и дифузију унутар коморе. На граници између филтер папира и ваздуха коморе морају важити одговарајући гранични услови.



Слика 4.6 Слика уз решење задатка 4.3

Дифузија у филтер папиру се описује једначином:

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} = \nabla(D_1 \nabla C_1) - \lambda C_1.$$

Како је $D_1 = const.$, важи:

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} = D_1 \Delta C_1 - \lambda C_1,$$

где је $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, тј. у цилиндричним координатама:

$$\Delta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Како је спољашња концентрација константна, после извесног времена наступа стационарно стање, $\frac{\partial C_1}{\partial t} = 0$, и једначина дифузије постаје временски независна:

$$D_1 \Delta C_1 - \lambda C_1 = 0.$$

Притом, не постоји латерална дифузија, јер нема депозиције на зидове цилиндра коморе и нема флукса на зидовима. Проблем постаје аксијално симетричан, $D_1 \frac{\partial C_1}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0$.

Једначине дифузије у филтру и комори су:

$$1^\circ D_1 \frac{\partial^2 C_1}{\partial z^2} - \lambda C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 C_1}{\partial z^2} - \frac{\lambda}{D_1} C_1 = 0.$$

$$2^\circ D_2 \frac{\partial^2 C_2}{\partial z^2} - \lambda C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 C_2}{\partial z^2} - \frac{\lambda}{D_2} C_2 = 0.$$

Увођењем смена $\omega_1 = \sqrt{\frac{\lambda}{D_1}}$ и $\omega_2 = \sqrt{\frac{\lambda}{D_2}}$ добија се:

$$\frac{\partial^2 C_1}{\partial z^2} - \omega_1^2 C_1 = 0.$$

Карактеристична једначина линеарне диференцијалне једначине другог реда са константним коефицијентима која је хомогена је:

$$k^2 - \omega_1^2 = 0,$$

$$k = \pm \omega_1,$$

Решења су облика:

$$C_1 = A_1 e^{\omega_1 z} + B_1 e^{-\omega_1 z} \quad \text{и}$$

$$C_2 = A_2 e^{\omega_2 z} + B_2 e^{-\omega_2 z}.$$

Гранични услови проблема се математички могу записати као:

$$1^\circ C_1(z = -L) = C_0$$

$$2^\circ C_1(z = 0) = C_2(x = 0)$$

$$3^\circ D_1 \frac{\partial C_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = D_2 \frac{\partial C_2}{\partial r}(z = 0)$$

$$4^\circ D_2 \frac{\partial C_2}{\partial z} \Big|_{z=H} = 0$$

Заменом израза за концентрације, добија се:

$$1^\circ A_1 e^{-\omega_1 L} + B_1 e^{\omega_1 L} = C_0$$

$$2^\circ A_1 + B_1 = A_2 + B_2$$

$$3^\circ D_1 A_1 \omega_1 - D_1 B_1 \omega_1 = D_2 A_2 \omega_2 - D_2 B_2 \omega_2$$

$$4^\circ D_2 A_2 \omega_2 e^{\omega_2 H} - D_2 B_2 \omega_2 e^{-\omega_2 H} = 0$$

Решавањем горњег система једначина, одређују се константе A_1, B_1, A_2 и B_2 . Оставља се тај пробелем за самостални рад.

Проблем дифузије у простору се може услед симетрије поједноставити на проблем аксијалне дифузије:

$$C_1(\rho, \phi, z) = C_1(z) = A_1 e^{\omega_1 z} + B_1 e^{-\omega_1 z},$$

$$C_2(\rho, \phi, z) = C_2(z) = A_2 e^{\omega_2 z} + B_2 e^{-\omega_2 z}.$$

Ако је елемент површине детектора $ds' = \rho' d\rho' d\phi'$, флуенс честица ка детектору, из произвољне тачке унутар детектора је:

$$dF = \frac{A_{(z)}}{4\pi r^2} \vec{n}_0 \cdot d\vec{S}, \text{ тј.}$$

$$dF = \frac{A_{(z)}}{4\pi r^2} \frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{S}, \text{ где је } \vec{n}_0 = \frac{\vec{r}}{r}, \text{ одакле је } dF = \frac{A_{(z)}}{4\pi r^3} \vec{r} \cdot d\vec{S}. \text{ Како је } d\vec{S} = dS \vec{e}_z,$$

$$\text{можемо писати } dF = \frac{A_{(z)}}{4\pi} \frac{r_z dS}{r^3}, \text{ тј. } dF = \frac{A_{(z)}}{4\pi} \frac{r_z dS}{(r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)^{3/2}}.$$

Вектор $\vec{r} = \vec{ML} = (\rho' \cos \phi' - \rho \cos \phi, \rho' \sin \phi' - \rho \sin \phi, H - z)$, и добија се:

$$dF = \frac{A_{(z)}}{4\pi} \frac{(H - z) dS}{\left[(\rho' \cos \phi' - \rho \cos \phi)^2 + (\rho' \sin \phi' - \rho \sin \phi)^2 + (H - z)^2 \right]^{3/2}},$$

$$dF = \frac{A_{(z)}(H - z)}{4\pi} \frac{\rho' d\rho' d\phi'}{\left[(\rho' \cos \phi' - \rho \cos \phi)^2 + (\rho' \sin \phi' - \rho \sin \phi)^2 + (H - z)^2 \right]^{3/2}},$$

$$F = \frac{A_{(z)}(H - z)}{4\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{\rho' d\rho' d\phi'}{\left[(\rho' \cos \phi' - \rho \cos \phi)^2 + (\rho' \sin \phi' - \rho \sin \phi)^2 + (H - z)^2 \right]^{3/2}},$$

$$F = \frac{A_{(z)}(H-z)}{4\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{\rho' d\rho' d\phi'}{\left[\rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\rho' + \rho) + \rho^2 + (H-z)^2\right]^{3/2}}.$$

Активност у тачки коморе се може одредити као $dA_{(z)} = \lambda dN_{(z)} = \lambda C_{(z)} dV$, тј. $dA_{(z)} = \lambda C_{(z)} \rho d\rho d\phi$, и заменом у израз за флуенс добија се:

$$F = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^H \frac{\lambda(H-z)}{4\pi} (A_2 e^{\omega_2 z} + B_2 e^{-\omega_2 z}) \times \\ \times \left[\int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{\rho' d\rho' d\phi'}{\left[\rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\rho' + \rho) + \rho^2 + (H-z)^2\right]^{3/2}} \right] \rho d\rho d\phi.$$

Задатак 4.4

Ефикасни пресек за реакцију $^{113}\text{Cd}(n, \gamma)^{114}\text{Cd}$ износи $\sigma = 6,4 \cdot 10^{-24} \text{ m}^2$. Мета дебљине $\Delta x = 10^{-6} \text{ m}$ направљена је од природног кадмијума који садржи $\eta = 12\%$ изотопа ^{113}Cd . Упадни сноп термалних неутрона има интензитет $I = 10^8 \text{ n/s}$. Претпостављајући да је расподела емитованих гама кваната изотропна, израчунати брзину бројања гама детектора површине $S = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$, чија је ефикасност $\varepsilon = 25\%$, ако је детектор постављен на растојању $L = 1 \text{ m}$ од мете. Густина кадмијума је $\rho_{\text{Cd}} = 8,5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$.

Решење:

Обележавајући са N број атома ^{113}Cd по јединици површине мете,

$$N = \eta n_0 \Delta x = \eta \frac{\sigma N_{\text{Av}}}{A} \Delta x,$$

релативно смањење интензитета термалних неутрона, $\frac{\Delta I}{I}$, је:

$$\frac{\Delta I}{I} = N \frac{d\sigma}{d\Omega} \Delta\Omega_D,$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\sigma}{4\pi},$$

$$\Delta\Omega_D = \frac{S}{L^2}.$$

Тражена брзина бројања детектора је:

$$R = \varepsilon \cdot \Delta I = \eta \frac{\sigma N_{Av}}{A} \Delta x \frac{\sigma}{4\pi} \frac{S}{L^2} I = 35 \frac{\text{imp}}{\text{s}} .$$

Задатак 4.5

Морска вода садржи 0,55g по литру. У природном калијуму има 0,012% изотопа ^{40}K , који је радиоактиван чији је период полураспада $1,2 \cdot 10^9$ god.

- а) Колика је специфична активност воде?
 б) Колико дуго се мора мерити препарат од једног литра воде, уређајем чија је укупна ефикасност 5%, ако се тражи резултат са релативним стандардним одступањем 1% ?

Решење:

- а) Маса изотопа ^{40}K се одређује из пропорције:

$$0,55 \text{ g} : 100 = x : 0,012 ,$$

$$x = 6,6 \cdot 10^{-5} \text{ g} .$$

Изотопа ^{40}K у 1 dm^3 воде има $6,6 \cdot 10^{-8} \text{ kg}$, што одговара броју атома:

$$N_x = \frac{x \cdot N_A}{40} = 9,93 \cdot 10^{17} .$$

Специфична активност је:

$$A_s = \lambda \cdot N_x = \frac{\ln 2 \cdot N_x}{T} = \frac{0,693 \cdot 9,93 \cdot 10^{17}}{1,2 \cdot 10^9 \cdot 3,156 \cdot 10^7} \text{ Bq/dm}^3 = 18,17 \text{ Bq/dm}^3$$

- б) Према поставци задатка релативно стандардно одступање је мање од 0,01:

$$\frac{\sqrt{R}}{R} \leq 0,01 ,$$

$$\frac{1}{\sqrt{R}} \leq \frac{1}{100} ,$$

$$R \geq 10^4 ,$$

$$R = A \cdot t \cdot \varepsilon = 10^4 ,$$

$$t = \frac{10^4}{A \cdot \varepsilon} = \frac{10^4}{18,17 \text{ Bq} \cdot 0,05} = 11007,15 \text{ s} = 3,06 \text{ h} .$$

4.2 СТАТИСТИКА РАДИОАКТИВНОГ РАСПАДА

Радиоактивни распад је случајан процес, због чега процес мерења интензитета зрачења емитованог при нуклеарном распаду подлеже статистичким флукуацијама. Ове флукуације представљају неизбежан извор неодређености. Може се дефинисати функција расподеле која описује резултате мерења која се понављају. Постоје три статистичка модела која описују радиоактивни распад.

Биномна расподела

Биномна расподела представља најупштији случај који се може применити на сва мерења иза којих стоје процеси са константним вероватноћама исхода, p . Ова расподела је непрактична за коришћење у случају радиоактивног распада и ретко се користи. Уколико је n број понављања неког мерења, вероватноћа реализације исхода x се може дефинисати Биномном расподелом:

$$P(x) = \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x} .$$

Биномна расподела је дефинисана за целобројне вредности бројева n и x . Средња вредност расподеле се једноставно може одредити као

$$\bar{x} = \sum_{x=0}^n xP(x) = pn .$$

Стандардна девијација износи

$$\sigma^2 = \sum (x - \bar{x})^2 P(x) = \bar{x}^2 - \bar{x}^2 = np(1-p) .$$

Поасонова расподела

У случају када је мала вредност за p , што имплицира да је q близу јединице биномна расподела се може апроксимирати помоћу Поасонове расподеле:

$$P(x) = \frac{\bar{x}^x e^{-\bar{x}}}{x!} .$$

Средња вредност Поасонове дистрибуције је $\bar{x} = np$, као и за биномну дистрибуцију. Стандардна девијација Поасонове дистрибуције је квадратни корен средње вредности:

$$\sigma = \sqrt{x}.$$

Нормална расподела

Нормална дистрибуција се може добити из Поасонове у случају великог броја реализације исхода. Густина вероватноће за континуалне вредности случајне променљиве x :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2x}}.$$

Вероватноћа да x узме вредности између x и $x + dx$ је $f(x)$. Вероватноћа да x узме вредности између x_1 и x_2 једнака је области испод криве $f(x)$ између ових двеју вредности:

$$P(x_1 \leq x \leq x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-(x-\bar{x})^2/2\sigma^2} dx,$$

$$z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}.$$

Стандардна нормална расподела је у случају нулте средње вредности и јединичне стандардне девијације. Претходна једначина тада постаје ($dx = \sigma dz$):

$$P(z_1 \leq z \leq z_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-z^2/2} dz.$$

Вредности интеграла се могу наћи и табеларно:

$$Pz(x_1 \leq z_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_0} e^{-z^2/2} dz.$$

Овај интеграл даје вероватноћу да нормална случајна променљива z има вредност мању или једнаку вредности z_0 .

Задатак 4.6

Хипотетички узорак од $N = 10$ атома ^{42}K (период полураспада је $12,4\text{h}$) је припремљен и посматран у току времена $t = 3\text{h}$.

- Одредити вероватноћу да ће се атоми 1, 3 и 8 распасти у току тог времена;
- Одредити вероватноћу да ће се атоми 1, 3 и 8 распасти у току тог времена, док остали неће доживети распад;
- Која вероватноћа је да ће се било која три атома распасти у току 3h ?
- Која вероватноћа је да ће се шест атома распасти у току 3h ?
- Која је шанса да нема атома који доживе распад у току 3h ?
- Која је општа формула за вероватноћу да ће се n атома распасти, где је $0 \leq n \leq 10$?
- Одредити суму свих могућих вероватноћа;
- Ако је узорку било $N = 100$ атома, која је шанса да нема атома који доживе распад у току 3h ?

Решење

Константа распада ^{42}K је:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{0,693}{12,4\text{h}} = 0,0559\text{h}^{-1}.$$

Вероватноћа да дати атом не доживи распад дата је формулом:

$$q = e^{-\lambda t},$$

$$q = e^{-0,0559 \cdot 3} = e^{-0,168} = 0,846.$$

Вероватноћа да дати атом доживи распад дата је формулом:

$$p = 1 - q,$$

$$p = 1 - 0,846 = 0,154.$$

Вероватноћа да атоми 1, 3 и 8 доживе распад биће:

$$p^3 = (0,154)^3 = 0,00365.$$

б) Вероватноћа да се осталих 7 атома неће распасти је:

$$q^7 = 0,846^7 = 0,310.$$

Вероватноћа да ће се само атоми 1, 3 и 8 распасти, док остали неће је

$$p^3 q^7 = 0,00365 \cdot 0,310 = 0,00113.$$

в) Последњи одговор $p^3 q^7$ даје вероватноћу за распад било која $n = 3$ атома за одређени временски интервал, који је дат. Број начина да ће било која три атома бити изабрано од $N = 10$ дат је помоћу биномне формуле:

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \frac{N(N-1)\dots(N-n+1)}{n!},$$

$$\binom{N}{n} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = \frac{720}{6} = 120.$$

Вероватноћа за распад тачно 3 атома је:

$$P_3 = \binom{10}{3} p^3 q^7 = 120 \cdot 0,00113 = 0,136.$$

г) Вероватноћа за распад тачно 6 атома је у току 3 часа је:

$$P_6 = \binom{10}{6} p^6 q^4 = \frac{10!}{6!4!} 0,154^6 \cdot 0,846^4 = 0,00143.$$

д) Вероватноћа да се не деси ни један распад је:

$$P_0 = \binom{10}{0} p^0 q^{10} = \frac{10!}{0!10!} \cdot 0,846^{10} = 0,188,$$

што је приближно четвртина времена полураспада.

ђ) Општа формула за вероватноћу да ће се n атома распасти, где је $0 \leq n \leq 10$ је:

$$P_n = \binom{10}{n} p^n q^{10-n}.$$

е) Сума свих могућих вероватноћа за све могуће бројеве распада, где је $0 \leq n \leq 10$ мора бити нормирана на јединицу:

$$\sum_{n=0}^{10} P_n = \sum_{n=0}^{10} \binom{10}{n} p^n q^{10-n} = (p+q)^{10}.$$

Пошто је $p+q=1$, укупна вероватноћа је једнака јединици.

ф) Ако је узорку било $N = 100$ атома, шанса да ни један атом доживи распад у току 3h је:

$q^{100} = 0,846^{100} = 5,46 \cdot 10^{-8}$, што је много мања вероватноћа него под д), када је у почетном узорку било само 10 атома.

Задатак 4.6

Експериментатор је методом понављања направио велики број узорака са $N=10$ атома ^{42}K у $t=0$. Активност је била непозната, али је експериментатор желео да процени средњи број распада за дато време од 3h. На крају, сваки нови узорак је постављао у бројач, чија је ефикасност $\varepsilon = 32\%$.

- Одредити вероватноћу да ће бити избројано тачно 3 импулса;
- Који је очекивани број импулса за 3 часа?
- Која је очекивана брзина бројања, усредњена за 3 часа?
- Која је очекивана брзина распада, усредњена за 3 часа?
- Одредити стандардну девијацију брзине бројања у току 3 часа;
- Одредити стандардну девијацију брзине распада у току 3 часа;
- Ако је ефикасност $\varepsilon = 100\%$, брзина бројања ће бити једнака брзини распада. Која је очекивана вредност и стандардна девијација брзине распада?

Решење

а) У претходном задатку, одређена је вероватноћа да 3 атома доживе распад, која износи $P_3 = 0,136$. Вероватноћа за појаву 3 импулса, $n^* = 3$ је $p^* = \varepsilon \cdot p$, где се уводи ефикасност бројача, док се q се замењује са $q^* = 1 - p^*$. Сада је $p^* = \varepsilon \cdot p = 0,32 \cdot 0,154 = 0,049$ и $q^* = 1 - p^* = 1 - 0,049 = 0,951$. Вероватноћа за опажање тачно 3 импулса је:

$$P_3^* = \binom{10}{3} p^{*3} q^{*7} = 120 \cdot 0,049^3 \cdot 0,951^7 = 0,00993.$$

б) Очекиван број импулса μ^* је:

$$\mu^* = Np^* = 10 \cdot 0,049 = 0,490,$$

Ово је очекивани број импулса за 3h. (За $\varepsilon = 1,00$, $\mu^* = \mu = Np = 1,54$. Количник μ^*/μ је усредњена фракција од распаднутих атома чији је распад детектован, ако је ε бројачка ефикасност.)

в) Очекивана брзина бројања за $t = 3\text{h}$ је $r_c = \mu^*/t = 0,490/3\text{h} = 0,163\text{h}^{-1}$.

г) Средња брзина распада за $t = 3\text{h}$ је $r_d = \mu^*/t\varepsilon = 0,163\text{h}^{-1}/0,32 = 0,513\text{h}^{-1}$. (Време посматрања није мало у поређењу са периодом полураспада, тако да је средња брзина распада за 3 часа мања од почетне активности $\lambda N = 0,0559\text{h}^{-1} \cdot 10 = 0,559\text{h}^{-1}$).

д) Стандардна девијација брзине бројања у току 3 часа је:

$$\sigma_{cr} = \frac{\sqrt{Np^*q^*}}{t},$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\sqrt{Np^*q^*}}{t} = \frac{\sqrt{10 \cdot 0,049 \cdot 0,951}}{3h} = 0,228h^{-1}.$$

ђ) Стандардна девијација брзине распада у току 3 часа је:

$$\sigma_{cd} = \frac{\sigma_{cr}}{\varepsilon},$$

$$\sigma_{cd} = \frac{\sigma_{cr}}{\varepsilon} = \frac{0,228h^{-1}}{0,32} = 0,7125h^{-1}.$$

е) Ако је ефикасност $\varepsilon = 100\%$, брзина бројања ће бити једнака брзини распада.

$$r_d = \frac{Np}{t},$$

$$r_d = \frac{Np}{t} = \frac{10 \cdot 0,154}{3h} = 0,513h^{-1}.$$

Одговарајућа стандардна девијација је:

$$\sigma_{dr} = \frac{\sqrt{Npq}}{t},$$

$$\sigma_{dr} = \frac{\sqrt{Npq}}{t} = \frac{\sqrt{10 \cdot 0,154 \cdot 0,846}}{3h} = 0,380h^{-1}.$$

Број распада за време t је дат као средња вредност μ биномне расподеле:

$$\mu \equiv \sum_{n=0}^N nP_n = \sum_{n=0}^N n \binom{N}{n} p^n q^{N-n},$$

$$\mu = Np,$$

Стандардна девијација је:

$$\sigma = \sqrt{Npq}.$$

Задатак 4.7

Дат је извор извор ^{42}K , чија је активност 37Bq . Извор је смештен у бројач ефикасности 100% и број импулса се региструје у интервалима времена од 1s . Период полураспада ^{42}K износи $T = 12,36\text{h}$.

- Одредити средњу брзину распада?
- Израчунати стандардну девијацију средње брзине распада;
- Која је вероватноћа да ће тачно 40 импулса бити забележено у 1s .

Решење:

а) Средња брзина распада је број распада у јединици времена, тј. дата активност:

$$r_d = 37\text{s}^{-1}.$$

б) Стандардна девијација средње брзине распада: $\sigma = \sqrt{Npq}$. Временски интервали су једнаки $t = 1\text{s}$; Константа распада је $\lambda = 0,559\text{h}^{-1} = 1,55 \cdot 10^{-5}\text{s}^{-1}$

$$q = e^{-\lambda t} = e^{-1,55 \cdot 10^{-5}\text{s}^{-1} \cdot 1\text{s}} = 0,9999845$$

и $p = 1 - q = 0,0000155$. Број атома је $N = \frac{r_d}{\lambda}$

$$N = \frac{r_d}{\lambda} = \frac{37\text{s}^{-1}}{1,55 \cdot 10^{-5}\text{s}^{-1}} = 2,39 \cdot 10^6.$$

Стандардна девијација брзине распада је:

$$\sigma_{dr} = \frac{\sqrt{Npq}}{t} = \frac{\sqrt{2,39 \cdot 10^6 \cdot 0,0000155 \cdot 0,9999845}}{1\text{s}} = 6,09\text{s}^{-1},$$

што је око 16% средње брзине распада.

в) Вероватноћа да ће тачно 40 импулса бити забележено у 1s :

$P_n = \binom{N}{n} p^n q^{N-n}$. За велико N и мало n , може се писати за биномни коефицијент:

$$\binom{N}{n} \equiv \frac{N(N-1)\dots(N-n+1)}{n!} \cong \frac{N^n}{n!},$$

$$P_{40} = \frac{(2,39 \cdot 10^6)^{40}}{40!} (0,0000155)^{40} (0,9999845)^{2,39 \cdot 10^6 - 40}$$

$$P_{40} = \frac{(2,39 \cdot 10^6)^{40} (0,0000155)^{40} (0,9999845)^{2,39 \cdot 10^6}}{40!}$$

где је $n = 40 \ll N$

$$\log(2,39)^{40} = 15,1359,$$

$$\log(10)^{240} = 240,$$

$$\log(0,0000155)^{40} = -192,3867,$$

$$\log(0,9999845)^{2,39 \cdot 10^6} = -16,0886,$$

$$\log 40! = 47,9116,$$

$$\log P_{40} = -1,251.$$

За одговарајућу вероватноћу се добија:

$$P_{40} = 10^{-1,251} = 0,0561.$$

Задатак 4.8

Поновити пример у задатку 4.7 коришћењем Поасонове статистике за апроксимацију биномне расподеле.

Решење

а) Средња брзина распада је број распада у јединици времена, тј. дата активност, која се пише као $\mu = 37 \text{ s}^{-1}$.

б) Стандардна девијација је: $\sigma = \sqrt{\mu} = \sqrt{37} = 6,08 \text{ s}^{-1}$.

в) Вероватноћа да ће се тачно 40 распада десити у секунди је:

$$P_{40} = \frac{37^{40} e^{-37}}{40!} = 0,0559,$$

што је добро слагање са вредношћу 0,0561, добијеном у претходном задатку.

Задатак 4.9

Дугоживећи радиоактивни извор је мерен више пута по 1min . Добијена је средња вредност брзине бројања од 813, са стандардном девијацијом 28,5 импулса.

- а) Која је вероватноћа опажања 800 или мањег броја импулса у минути?
- б) Која је вероватноћа опажања 850 или већег броја импулса у минути?
- в) Која је вероватноћа опажања између 800 и 850 импулса у минути?
- г) Колики је симетрични опсег око средње вредности у коме ће се наћи 90% случајева мерења у току 1 минуте?

Решење

а) Средња вредност брзине бројања и стандардна девијација су:

$\mu = 813$ $\sigma = 28,5 \text{ imp}$. Означимо са x број импулса у минути. Нормална случајна променљива је:

$$z = \frac{x - 813}{28,5} .$$

Вероватноћа да x узме вредност мању или једнаку 800 је иста као за вероватноћу z :

$$\frac{800 - 813}{28,5} = -0,456 .$$

Нумеричком интеграцијом налази се да је:

$$P(x \leq 800) = P(z \leq -0,456) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-0,456} e^{-z^2/2} dz = 0,324 .$$

б) Вероватноћа да x узме вредност већу или једнаку 850 је:

$$z = \frac{850 - 813}{28,5} = 1,30 ,$$

$$P(z \geq z_0) = 1 - P(z \leq z_0) ,$$

Добија се да је:

$$P(x \geq 850) = P(z \geq 1,30) = 1 - P(z \leq z_0) = 1 - 0,9032 = 0,0968 ,$$

в) као што следи из а и б вероватноћа да x узме вредности између 800 и 850 је једнака области нормалне стандардне расподеле за интервал $0,456 < z < 1,30$:

$$\begin{aligned}
 P(< x < 850) &= P(-0,456 < z < 1,30) \\
 &= P(z < 1,30) - P(z < -0,456_0) \quad , \\
 &= 0,903 - 0,324 = 0,579
 \end{aligned}$$

Може се показати да је сума вероватноћа (одговори под а,б и в) даје јединицу:
 $0,324 + 0,097 + 0,5790 = 1,000$.

г) За стандардну нормалну криву, 90% области је симетрични интервал $\pm z$ око $z=0$, што одговара вредности за z са вероватноћом $P(z \leq z_0) = 0,95$. Вредност $z_0 = 1,645$.

Одговарајући интервал за x је $\pm 1,645$.

90% вредности за x ће пасти у интервал $813 \pm 1,645 \cdot 28,5 = 813 \pm 46,9$.

Задатак 4.10

Мерење извора и основног зрачења (фона) обављено је ГМ бројачем у току $t = 100\text{s}$. Нека је за извор добијено 10000 импулса, а за фон 1000.

а) Наћи брзину бројања кориговану на фон и грешку мерења за стандардну поузданост.

б) Колико дуго треба мерити фон да би релативне грешке фона и брзине бројања биле исте?

в) Колико дуго треба мерити фон да би грешка мерења фона била занемарљива?

Решење:

$t = 100\text{s}$ $N = 10000\text{imp}$ $N_0 = 1000\text{imp}$ $k = 1$ - стандардна поузданост

(а) $t = t_0 = 100\text{s}$

Брзина бројања самог извора:

$$R = \frac{N}{t} = \frac{10000\text{imp}}{100\text{s}} = 100 \frac{\text{imp}}{\text{s}}$$

Фон:

$$R = \frac{N_0}{t_0} = \frac{1000\text{imp}}{100\text{s}} = 10 \frac{\text{imp}}{\text{s}}$$

Брзина бројања коригована на фон и одговарајућа апсолутна грешка су:

$$R_c = R - R_0 = 100 \frac{\text{imp}}{\text{s}} - 10 \frac{\text{imp}}{\text{s}} = 90 \frac{\text{imp}}{\text{s}},$$

$$\Delta_{R_c} = \pm k \sqrt{\frac{R}{t} + \frac{R_0}{t_0}},$$

$$\Delta_{R_c} = \pm 1 \sqrt{\frac{100}{100} + \frac{10}{100}} = \sqrt{1,1} = 1,049 \frac{\text{imp}}{\text{s}},$$

$$R_c = (90 \pm 1) \frac{\text{imp}}{\text{s}}.$$

Релативна грешка брзине бројања кориговане на фон:

$$\delta_{R_c} = \frac{\Delta_{R_c}}{R_c} = \frac{1}{90} = 0,011 = 1,1\%.$$

б) Користи се услов да релативна грешка фона и брзина бројања буду једнаке:

$$\Delta_R = \Delta_{R_0},$$

$$\pm k \sqrt{\frac{R}{t}} = \pm k \sqrt{\frac{R_0}{t_0}},$$

чијим се квадрирањем добија:

$$\frac{R}{t} = \frac{R_0}{t_0}.$$

Тражено време мерења је:

$$t_0 = \frac{R_0}{R} \cdot t = \frac{10 \text{imp/s}}{100 \text{imp/s}} \cdot 100 \text{s} = 10 \text{s}.$$

в) Грешку мерења можемо да занемаримо ако је за ред величине мања од осталих:

$$10 \Delta_{R_0} = \Delta_R,$$

$$10 \sqrt{\frac{R_0}{t_0}} = \sqrt{\frac{R}{t}}.$$

Квадрирањем се добија тражено време:

$$100 \frac{R_0}{t_0} = \frac{R}{t},$$

$$t_0 = \frac{100 \cdot R_0}{R} \cdot t = 1000 \text{ s}.$$

Задатак 4.11

Дугоживећи радиоактивни узорак је смештен у бројач у току времена од 10 min и регистровано је 1426 импулса. Затим је узорак уклоњен и измерен је фон за време од 90 min, при чему је број импулса 2561.

- Одредити брзину бројања узорка, која је коригована на фон (нето брзина бројања) као и одговарајућу стандардну девијацију.
- Ако је ефикасност бројача 28%, одредити активност узорка и одговарајућу стандардну девијацију у Bq.
- Без понављања мерења фона, колико дуго би требало мерити узорак у циљу добијања вредности брзине бројања у интервалу 95% (ниво поверења), са мерном несигурношћу $\pm 5\%$?
- Које време је довољно да би се обезбедило да активност буде позната $\pm 5\%$ са поверењем 95% ?

Решење:

а) Брзине бројања узорка и фона су:

$$R = \frac{N}{t} = \frac{1426 \text{ counts}}{10 \text{ min}} = 142,6 \text{ cpm}$$

$$R_0 = \frac{N_0}{t_0} = \frac{2562 \text{ counts}}{90 \text{ min}} = 28,45 \text{ cpm}$$

Брзина бројања узорка, коригована на фон, се добија као разлика ове две вредности:

$$R_c = R - R_0 = 142,6 \text{ cpm} - 28,45 \text{ cpm} \cong 114 \text{ cpm}$$

Одговарајућа стандардна девијација је:

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{N}{t} + \frac{N_0}{t_0}} = \sqrt{\frac{R}{(t)^2} + \frac{R_0}{(t_0)^2}},$$

$$\sigma_c \sqrt{\frac{1426}{(10 \text{ min})^2} + \frac{2845}{(90 \text{ min})^2}} = 3,82 \text{ min}^{-1} = 3,82 \text{ cpm} \cong 4 \text{ cpm}$$

на основу чега се резултат може записати у облику:

$$R_c = (114 \pm 4) \text{ cpm} ;$$

б) На основу ефикасности бројача 28% , тражена активност узорка је:

$$A = \frac{R_c}{\varepsilon} = \frac{114 \text{ cpm}}{0,28} = \frac{114}{0,28 \cdot 60 \text{ s}} = 6,78 \text{ Bq} ,$$

одговарајућа стандардна девијација је:

$$\sigma_A = \frac{\sigma_R}{\varepsilon} = \frac{3,82 \text{ m}^{-1}}{0,28} = \frac{3,82}{0,28 \cdot 60 \text{ s}} = 0,23 \text{ Bq} .$$

Резултат за активност се може записати у облику:

$$A = (6,79 \pm 0,23) \text{ Bq} ;$$

в) Брзина бројања, чија је мерна несигурност $\pm 5\%$ је

$114 \cdot 0,05 = 5,7 \text{ cpm}$, а одговарајућа брзина бројања са нивоом поверења од 95% је

$$5,7 \text{ cpm} = 1,96 \cdot \sigma_c ,$$

Одакле се добија одговарајућа стандардна девијација $\sigma_{c1} = 5,7 \text{ cpm} / 1,96 = 2,91 \text{ cpm}$.

Време мерења узорка t_1 се рачуна из релације:

$$\sigma_{c1} = \sqrt{\frac{R}{t_1} + \frac{R_0}{t_0}}$$

$$2,91 \text{ cpm} = \sqrt{\frac{142,6 \text{ min}^{-1}}{t_1} + \frac{28,5 \text{ min}^{-1}}{t_0}} .$$

$$t_1 = 17,5 \text{ min} ;$$

г) Исто време као под в.

Задатак 4.12

Нека је ГМ бројачем мерен радиоактиван извор у временском интервалу од 1000s , при чему је добијен одброј од $N = 171734$ импулса.

а) Извршити корекцију брзине бројања на мртво време бројача, које износи $\tau = (12 \pm 2) \mu\text{s}$

б) Наћи активност извора, ако је ефикасност бројача $\varepsilon = (98,3 \pm 0,1) \%$.

Решење

а) Брзина бројања:

$$R = \frac{N}{t},$$

$$R = \frac{N}{t} = \frac{171734 \text{ imp}}{1000 \text{ s}} = 171,734 \frac{\text{imp}}{\text{s}},$$

$$\Delta_R = \sqrt{\frac{R}{t}} = 0,414.$$

Корекција брзине бројања на мртво време бројача се добија по формули:

$$R_s = \frac{R}{1 - R\tau} = 172,098,$$

$$\Delta_{R_s} = R_s \left(\frac{\Delta_R}{R} + \frac{\tau \cdot \Delta_R + R\Delta_\tau}{1 - \tau \cdot R} \right) = 0,475.$$

б) $\varepsilon = \frac{R_s}{A},$

$$A = \frac{R_s}{\varepsilon} = 175,07 \text{ Bq},$$

$$\Delta_A = A \left(\frac{\Delta_\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{\Delta_{R_s}}{R_s} \right) = 0,66 \text{ Bq}.$$

Задатак 4.13

Мерење β - активности радиоактивног узорка вршено је у десетосекундним интервалима, при чему је добијена серија мерења дата у табели 4.3, и резервна мерења: 3874, 3877 и 3876.

а) Статистички обрадити добијене резултате мерења;

б) Ако је ефикасност за детекцију бројача $\varepsilon = (86 \pm 4)\%$, наћи активност мереног узорка и несигурност познавања те активности;

ц) Колико дуго једнократно треба мерити узорак да би грешка мерења познавања активности била иста?

Табела 3 Брзина бројања узорка у задатку 4.13

	$N(\text{imp})$
1.	3877
2.	3873
3.	3878
4.	3871
5.	3872
6.	3814
7.	3873
8.	3874
9.	3873
10.	3875

Решење

а) Брзина појединачних бројања и средња вредност $R = \frac{N}{t} = \frac{N}{10\text{s}}$, $\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^n R_i}{n}$ за $n=10$ су дате у табели 4.

Табела 4 Табела у решење задатка 4.13

	$N(\text{imp})$	$R\left(\frac{\text{imp}}{s}\right)$	Δ_R	Δ_R^2
1.	3877	387,7	0,89	0,7921
2.	3873	387,3	0,49	0,2401
3.	3878	387,8	0,99	0,9801
4.	3871	387,1	0,29	0,0841
5.	3872	387,2	0,39	0,1521
6.	3814	381,4	-5,41	29,2681
7.	3873	387,3	0,49	0,2401
8.	3874	387,4	0,59	0,3481
9.	3873	387,3	0,49	0,2401
10.	3875	387,5	0,79	0,6241
Σ		3868,1	0	32,969

$$\bar{R} = \frac{1}{10} \left(387,7 + 387,3 + 387,8 + 387,1 + 387,2 + \right. \\ \left. + 381,4 + 387,3 + 387,4 + 387,3 + 387,6 \right),$$

$$\bar{R} = 386,81 \frac{\text{imp}}{s}.$$

Апсолутно одступање износи:

$$\Delta_R = R_i - \bar{R}.$$

Стандардна девијација је:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta_R)^2}{n-1}},$$

$$\sigma = 1,914 \frac{\text{imp}}{s}.$$

Примењује се Шевенеов критеријум за проверу конзистентности мерених

вредности: $\frac{|\Delta_{R_i}|_{\max}}{\sigma} \leq 1,96$.

Како је за *шесту* вредност добијено $\frac{|-5,41|}{1,914} = 2,83 > 1,96$, она се замењује првим резервним мерењем.

Табела 5 Табела у решење задатка 4.13

	$N(\text{imp})$	$R\left(\frac{\text{imp}}{s}\right)$	Δ_R	Δ_R^2
1.	3877	387,7	0,29	0,0841
2.	3873	387,3	-0,11	0,0121
3.	3878	387,8	0,39	0,1521
4.	3871	387,1	-0,31	0,0961
5.	3872	387,2	-0,21	0,0441
6.	3874	387,4	-0,01	0,0001
7.	3873	387,3	-0,11	0,0121
8.	3874	387,4	-0,01	0,0001
9.	3873	387,3	-0,11	0,0121
10.	3875	387,5	0,19	0,0361
Σ		3868,1	0	0,449

Заменом шесте вредности, добија се нова табела, па је:

$$\bar{R} = 387,41 \frac{\text{imp}}{s},$$

$$\sigma = 0,223 \frac{\text{imp}}{s},$$

$$\frac{|0,39|}{0,223} = 1,75 < 1,96,$$

$$k = 1: \quad 387,19 \leq R \leq 387,63.$$

Седам вредности лежи у овом интервалу ($\approx 70\%$). За $k = 3$ требало би да све вредности леже у том интервалу:

$$\Delta_{\bar{R}} = \pm k\sigma,$$

$$\Delta_{\bar{R}} = 1 \cdot 0,223 \frac{\text{imp}}{\text{s}} = 0,223 \frac{\text{imp}}{\text{s}},$$

$$\bar{R} = (387,41 \pm 0,22) \frac{\text{imp}}{\text{s}},$$

$$\bar{R} = (387,4 \pm 0,2) \frac{\text{imp}}{\text{s}}.$$

Исправна су оба записа.

$$\text{б) } \varepsilon = (86 \pm 4)\%$$

Активност је

$$\varepsilon = \frac{\bar{R}}{A},$$

$$A = \frac{\bar{R}}{\varepsilon},$$

$$A = \frac{387,41}{0,86} \text{s}^{-1} = 450,48 \text{Bq},$$

$$\ln A = \ln \bar{R} - \ln \varepsilon,$$

$$\frac{dA}{A} = \frac{d\bar{R}}{\bar{R}} - \frac{d\varepsilon}{\varepsilon},$$

$$\frac{\Delta_A}{A} = \frac{\Delta_{\bar{R}}}{\bar{R}} + \frac{\Delta_{\varepsilon}}{\varepsilon},$$

$$\frac{\Delta_A}{A} = \frac{0,22}{387,41} + \frac{0,04}{0,86} = 0,047,$$

$$\Delta_A = 0,047 \cdot A = 0,047 \cdot 450,48 \text{Bq} = 21,21 \text{Bq},$$

$$A = (450 \pm 20) \text{Bq},$$

$$A = (450 \pm 21) \text{Bq}.$$

Први запис је тачнији.

$$\text{в) } \frac{\Delta_R}{R} = \pm k \sqrt{\frac{1}{Rt}}.$$

Ако се претпостави да је $R = \bar{R}$, добија се тражено време мерења за $k = 1$

$$\frac{\Delta_{\bar{R}}}{\bar{R}} = \sqrt{\frac{1}{\bar{R}t}},$$

$$\frac{\Delta_{\bar{R}}^2}{\bar{R}^2} = \frac{1}{\bar{R}t},$$

$$t = \frac{\bar{R}}{(\Delta_{\bar{R}})^2} = \frac{387,41 \text{ imp/s}}{0,22^2 \text{ s}^{-2}} = 8004,34 \text{ s}.$$

Задатак 4.14

На основу апсорпције гама зрачења потребно је извршити мерење дебљине плочице непознатог материјала помоћу ГМ бројача. Најпре је мерење вршено без плочице, и у времену од $t = 1000 \text{ s}$ добијено је $N = 462316 \text{ imp}$. Затим је под идентичним условима постављена плочица, која је апсорбујући део зрачења, смањила његов интензитет. Мерењем у интервалима од 10 s добијена је серија мерења дата у табели б:

Табела 6 Табела уз задатак 4.14

	$N(\text{imp})$
1.	4370
2.	4316
3.	4253
4.	4323
5.	4387
6.	4337
7.	4319
8.	4381
9.	4359
10.	4328

и резервна мерења 4331, 4333 и 4358.

а) Статистички обрадити добијене резултате.

б) Одредити дебљину плочице ако се зна да је дебљина полуапсорпције датог материјала $d_{1/2} = (2,105 \pm 0,005) \text{ mm}$.

в) Одредити колику дебљину воденог слоја треба поставити да би се постигао исти ефекат апсорпције, ако је коефицијент апсорпције воде $\mu = (0,0706 \pm 0,0001) \text{cm}^{-1}$.

Решење:

а) Средња брзина бројања износи

$$\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^n R_i}{n}, \text{ за } n, \text{ где је}$$

$$\bar{R} = \frac{1}{10} \left(437 + 431,6 + 425,3 + 432,3 + 438,7 + \right. \\ \left. + 433,7 + 431,9 + 438,1 + 435,9 + 432,8 \right) \frac{\text{imp}}{\text{s}},$$

$$\bar{R} = 433,73 \frac{\text{imp}}{\text{s}}.$$

Апсолутно одступање је:

$$\Delta_R = R_i - \bar{R}.$$

Стандардна девијација износи:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta_R)^2}{n-1}}, \sigma = 3,96 \frac{\text{imp}}{\text{s}}.$$

Примењује се Шевенеов критеријум: $\frac{|\Delta_{R_i}|_{\max}}{\sigma} \leq 1,96$.

Табела 7 Табела у решење задатка 4.14

	$N\left(\frac{\text{imp}}{10\text{s}}\right)$	$R\left(\frac{\text{imp}}{\text{s}}\right)$	Δ_R	Δ_R^2
1.	4370	437,0	3,27	10,69
2.	4316	431,6	-2,13	4,54
3.	4253	425,3	-8,43	71,06
4.	4323	432,3	-1,43	2,04
5.	4387	438,7	4,97	24,7
6.	4337	433,7	-0,03	0,0009
7.	4319	431,9	-1,83	3,35
8.	4381	438,1	4,37	19,09
9.	4359	435,9	2,17	4,71
10.	4328	432,8	-0,93	0,86
Σ		4337,3	0	141,041

Како је за *трећу* вредност добијено $\frac{|-8,43|}{3,96} = 2,12 > 1,96$, она се замењује првим резервним мерењем.

Табела 8 Табела у решење задатка 4.14

	$N\left(\frac{\text{imp}}{10\text{s}}\right)$	$R\left(\frac{\text{imp}}{\text{s}}\right)$	Δ_R	Δ_R^2
1.	4370	437,0	2,49	6,20
2.	4316	431,6	-2,91	8,47
3.	4331	433,1	-1,41	1,99
4.	4323	432,3	-2,21	4,88
5.	4387	438,7	4,19	17,56
6.	4337	433,7	-0,81	0,66
7.	4319	431,9	-2,61	6,81
8.	4381	438,1	3,59	12,89
9.	4359	435,9	1,39	1,93
10.	4328	432,8	-1,71	2,92
Σ		4345,1	0	

За тако добијену серију мерења, средња вредност броја импулса за $t = 10\text{s}$ је:

$$\bar{R} = 434,51 \frac{\text{imp}}{\text{s}},$$

$$\sigma = 2,67 \frac{\text{imp}}{\text{s}}.$$

Провери се пета вредност да ли задовољава Шевенеов критеријум:

$$\frac{|4,19|}{2,67} = 1,57 < 1,96, \text{ где је } \Delta_{\bar{R}} = \pm k\sigma \text{ за } k = 1, \text{ тј.}$$

$$\Delta_{\bar{R}} = \pm 1 \cdot 2,67 \frac{\text{imp}}{\text{s}} = \pm 2,67 \frac{\text{imp}}{\text{s}},$$

$$\bar{R} = (435 \pm 3) \frac{\text{imp}}{\text{s}} \equiv R.$$

Како је $t = 1000\text{s}$ и $N = 462316 \text{imp}$ добија се

$$R = \frac{462316 \text{imp}}{1000\text{s}} = 462,316 \frac{\text{imp}}{\text{s}}, \text{ тј.}$$

$$\Delta_R = \pm k \sqrt{\frac{R}{t}} = \pm \sqrt{\frac{R}{t}}, \quad \Delta_R = \pm \sqrt{\frac{462,316}{1000}} = 0,68 \frac{\text{imp}}{\text{s}},$$

$$R = (462,3 \pm 0,7) \frac{\text{imp}}{\text{s}} \equiv R_0 - \text{у почетном тренутку.}$$

б) Нека је $R = R_0 e^{-\mu x}$, где је R_0 брзина бројања без плочице, а R брзина бројања када се постави плочица.

Ако се претходна једначина прилагоди ознакама у задатку, добија се

$$\bar{R} = R e^{-\mu x}.$$

Пошто је коефицијент слабења повезан са полудебљином $\mu = \frac{\ln 2}{d_{1/2}}$, добија се

тражена дебљина материјала:

$$x = \frac{d_{1/2}}{\ln 2} \cdot \ln \frac{R}{\bar{R}},$$

$$x = \frac{d_{1/2}}{\ln 2} \cdot \ln \frac{R}{\bar{R}} = \frac{2,105}{\ln 2} \cdot \ln \frac{462,3}{435} = 0,18 \text{ mm}.$$

Потребно је одредити мерну несигурност дебљине:

$$x = \frac{d_{1/2}}{\ln 2} (\ln R - \ln \bar{R}).$$

Израз се логаритмује:

$$\ln x = \ln d_{1/2} - \ln(\ln 2) + \ln(\ln R - \ln \bar{R}),$$

а затим се диференцира:

$$\frac{dx}{x} = \frac{d(d_{1/2})}{d_{1/2}} + \frac{d(\ln R - \ln \bar{R})}{\ln R - \ln \bar{R}} = \frac{d(d_{1/2})}{d_{1/2}} + \frac{1}{\ln R - \ln \bar{R}} \cdot \left(\frac{dR}{R} - \frac{d\bar{R}}{\bar{R}} \right).$$

Затим се замени d са Δ , а знак $-$ са $+$:

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta(d_{1/2})}{d_{1/2}} + \frac{1}{\ln R - \ln \bar{R}} \cdot \left(\frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta \bar{R}}{\bar{R}} \right),$$

$$\Delta x = x \cdot \left[\frac{\Delta(d_{1/2})}{d_{1/2}} + \frac{1}{\ln R - \ln \bar{R}} \cdot \left(\frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta \bar{R}}{\bar{R}} \right) \right],$$

$$\Delta x = 0,18 \cdot \left[\frac{0,005}{2,105} + \frac{1}{\ln \frac{462,3}{435}} \cdot \left(\frac{0,7}{462,3} + \frac{3}{435} \right) \right] = 0,0253 \text{ mm} .$$

Коначно је:

$$x = (0,18 \pm 0,03) \text{ mm} .$$

в) Вода:

$\bar{R} = R e^{-\mu_v x}$, одакле је $\ln \bar{R} = \ln R - \mu_v x$, тј

$$x = \frac{1}{\mu_v} \ln \frac{R}{\bar{R}} ,$$

$$x = \frac{1}{\mu_v} \ln \frac{R}{\bar{R}} = \frac{1}{0,0706} \ln \frac{462,3}{435} = 0,86 \text{ cm} = 8,6 \text{ mm} .$$

Израз за x се логаритмује и диференцира у циљу налажења мерне неодређености:

$$x = \frac{1}{\mu_v} \ln \frac{R}{\bar{R}} ,$$

$$\ln x = \ln 1 - \ln \mu_v + \ln \left(\ln \frac{R}{\bar{R}} \right) = \ln 1 - \ln \mu_v + \ln (\ln R - \ln \bar{R}) ,$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{d\mu_v}{\mu_v} + \frac{d(\ln R - \ln \bar{R})}{\ln R - \ln \bar{R}} ,$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{d\mu_v}{\mu_v} + \frac{\frac{dR}{R} + \frac{d\bar{R}}{\bar{R}}}{\ln R - \ln \bar{R}} ,$$

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta \mu_v}{\mu_v} + \frac{1}{\ln R - \ln \bar{R}} \left(\frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta \bar{R}}{\bar{R}} \right) ,$$

$$\Delta x = x \cdot \left[\frac{\Delta \mu_v}{\mu_v} + \frac{1}{\ln R - \ln \bar{R}} \left(\frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta \bar{R}}{\bar{R}} \right) \right] ,$$

$$\Delta x = 8,6 \text{ mm} \cdot \left[\frac{0,0001}{0,0706} + \frac{1}{\ln \frac{462,3}{435}} \left(\frac{0,7}{462,3} + \frac{3}{435} \right) \right] = 1,2 \text{ mm} ,$$

$$x = (8,6 \pm 1,2) \text{ mm или,}$$

$$x = (9 \pm 1) \text{ mm .}$$

Задатак 4.15

Потребно је измерити мртво време ГМ бројача „Методом два извора“ која се састоји у следећем. У мерну посуду испред бројача постави се један радиоактивни извор па се узастопним мерењима измери и добије средња вредност брзине бројања $R_1 = 481 \text{ imp/s}$. Затим се поред првог извора постави други радиоактивни извор и измери средња вредност брзине бројања оба извора $R_{1,2} = 974 \text{ imp/s}$. Пошто се уклони први извор са мерног места, одреди се средња вредност вредност брзине бројања другог извора $R_2 = 543 \text{ imp/s}$. После уклањања свих извора, измери се брзина бројања основног зрачња R_0 , која је износила $R_0 = (5,5 \pm 0,6) \text{ imp/s}$. Израчунати мртво време бројача.

Решење

Мртво време бројача применом „Метода два извора“ једнако је:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\bar{R}_1 + \bar{R}_2 - \bar{R}_{1,2} - R_0}{\bar{R}_{1,2}^2 - (\bar{R}_1^2 + \bar{R}_2^2)}, \\ \tau &= \frac{\bar{R}_1 + \bar{R}_2 - \bar{R}_{1,2} - R_0}{\bar{R}_{1,2}^2 - (\bar{R}_1^2 + \bar{R}_2^2)}, \\ &= \frac{481 + 543 - 974 - 5,5}{9,49 \cdot 10^5 - (2,31 \cdot 10^5 + 2,95 \cdot 10^5)} = 1,05 \cdot 10^{-4} \text{ s} \cong 105 \mu\text{s} . \end{aligned}$$

Одговарајућа мерна несигурност је:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_\tau}{\tau} &= \frac{\Delta_{\bar{R}_1} + \Delta_{\bar{R}_2} + \Delta_{\bar{R}_{1,2}} + \Delta_{R_0}}{\bar{R}_1 + \bar{R}_2 - \bar{R}_{1,2} - R_0} + \\ &+ \frac{2\bar{R}_1\Delta_{\bar{R}_1} + 2\bar{R}_2\Delta_{\bar{R}_2} + 2\bar{R}_{1,2}\Delta_{\bar{R}_{1,2}} + \Delta_{\bar{R}_2} + \Delta_{\bar{R}_{1,2}}\Delta_{\bar{R}_{1,2}}\bar{R}_2 - \bar{R}_{1,2} - \Delta_{R_0}}{\bar{R}_{1,2}^2 - (\bar{R}_1^2 + \bar{R}_2^2)} , \end{aligned}$$

$$\Delta_\tau = \tau \left(\frac{\Delta_{\bar{R}_1} + \Delta_{\bar{R}_2} + \Delta_{\bar{R}_{1,2}} + \Delta_{R_0}}{\bar{R}_1 + \bar{R}_2 - \bar{R}_{1,2} - R_0} + \frac{2\bar{R}_1\Delta_{\bar{R}_1} + 2\bar{R}_2\Delta_{\bar{R}_2} + 2\bar{R}_{1,2}\Delta_{\bar{R}_{1,2}} + \Delta_{\bar{R}_2} + \Delta_{\bar{R}_{1,2}} \Delta_{\bar{R}_{1,2}} \bar{R}_2 - \bar{R}_{1,2} - \Delta_{R_0}}{\bar{R}_{1,2}^2 - (\bar{R}_1^2 + \bar{R}_2^2)} \right),$$

$$\Delta_\tau = 9,88 \mu\text{s} ,$$

$$\tau = (105 \pm 10) \mu\text{s} .$$

5 ЛАБОРАТОРИЈСКЕ ВЕЖБЕ

5.1 ЗАВИСНОСТ ЕКСПОЗИЦИОНЕ ДОЗЕ ОД РАСТОЈАЊА

Поље зрачења опада са квадратом растојања од тачкастог извора и експозициона доза се може изразити следећом релацијом:

$$\dot{X} = C \frac{A}{r^2},$$

где је A активност радиоактивног извора у Bq , r је растојање у метрима и C је константа пропорционалности која се назива јонизациона константа и даје се у $\left[\frac{\text{Cm}^2}{\text{kg} \cdot \text{s} \cdot \text{Bq}} \right] = \left[\frac{\text{Cm}^2}{\text{kg}} \right]$.

Циљ ове вежбе је провера законитости опадања јачине експозиционе дозе од квадрата растојања. Вежба се изводи на следећи начин. Мерење зрачења се обавља тзв. алармним монитором гама зрачења, MZ 10, који користи Гајгер Милеров бројач за детекцију зрачења. Овај уређај је калибрисан на јачину експозиционе дозе у $\mu\text{A/kg}$. На дисплеју се измерени резултат појављује сваке 2s.

Монитор "MZ-10", слика 5.1, је намењен за мерења у средини у којој се ради и борави. Мерни опсег је од $10 \text{ pC kg}^{-1}\text{s}^{-1}$ до $999 \text{ pC kg}^{-1}\text{s}^{-1}$ (0.14 mR/h до 140 mR/h), а може се користити и за откривање бета контаминације. Монитор је уграђен у водонепропусну шасију, тако да је погодан за рад у влажној или агресивној атмосфери, а отпоран је на механичке ударе и вибрације. Има могућност цифарског избора једног од тридесет декадно распоређених алармних нивоа. Аларм се добија преко звучника уграђеног у инструмент. Напајање монитора је из мреже $220\text{V}/50\text{Hz}$ или из акумулатора 12V .



Слика 5.1. Алармни монитор гама зрачења са сондом

Задаци:

Потребно је измерити јачину експозиционе дозе за већи број растојања. За свако растојање забележити 12 читавања (10 регуларних и 2 контролна). Водити рачуна да се на дисплеју мерне вредности појављују сваке две секунде. Уколико се после две секунде резултат мерење не промени, ново измерена вредност је иста као и претходна и треба је записати. При промени вредности на дисплеју може се уочити трептање цифара на екрану. Користећи првих 10 мерења одредити средњу вредност и стандардну девијацију. Извршити проверу сваког мерења из серије, Шевененовим критеријумом. По овом критеријуму одступање сваког мерења од средње вредности по апсолутној вредности подељено са стандардном девијацијом серије мерења не сме прећи извесну вредност q која је дефинисана на основу броја чланова серије мерења. За серију од 10 мерења q износи 1.96 :

$$\frac{|\dot{X}_{ij} - \bar{X}_i|}{\sigma_i} \leq q \quad .$$

Уколико нека од измерених вредности не задовољава овај критеријум заменити је са једном измереном вредношћу из контролне серије.

Нацртати график зависности средње вредности јачине експозиционе дозе од растојања за извор ^{137}Cs , $T_{1/2} = 30,17$ година. На графику унети грешке

мерних величина. Нацртати зависности количника експозиционе дозе и активности извора од $1/r^2$. Из овог графика одредити графичком методом вредност јонизационе константе из података о нагибу праве, као и одговарајуће грешке. Резултате сортирати према Табели 9. За одређивање јонизационе константе потребна је активност радиоактивног извора који се користи у вежби. Са сертификата извора који је коришћен забележити вредност активности на дан производње и датум производње. Прерачунати активност на дан вршења мерења.

Табела 9 Резултати мерења јачине експозиционе дозе

R_i	\dot{X}_{i1}	\dot{X}_{i2}	...	\bar{X}_i	σ_i
1.					
...					

5.2 КАЛИБРАЦИЈА ГМ БРОЈАЧА НА ЈАЧИНУ ЕКСПОЗИЦИОНЕ ДОЗЕ

Монитор зрачења КОМО-ТМ, слика 5.2, је преносни транзисторски монитор зрачења, намењен за:

- мерење поља гама зрачења од неколико $\text{pC kg}^{-1}\text{s}^{-1}$ до $\mu\text{C kg}^{-1}\text{s}^{-1}$ ($\mu\text{R/h}$ - R/h);
- одређивање степена контаминације разних површина, одеће, обуће, опреме и др.
- проверу степена контаминације лабораторијског инвентара и сл.
- мерење узорака контаминираних физионом продуктима.

Коришћењем одговарајућих ГМ бројача, као детектора зрачења, могу се откривати и мерити бета, гама и X – зрачење.



Слика 5.2. КОМО ТМ инструмент

Уређај КОМО ТМ садржи:

- Стабилизирани претварач напона који се напаја из батерија или акумулатора.

- Коло за бројање импулса, које мери средњи број импулса. Оно садржи микроамперметар који мери струју пропорционалну средњем броју импулса у јединици времена.
- Коло за звучну индикацију.
- Сонду за откривање зрачења која садржи ГМ бројач и спојена је са каблом за мерни уређај.

Опсези мерења бројача су 0–10 imp/s ; 0–100imp/s и 0–1000imp/s. Постоји и струјни опсег који мери струју у пољу зрачења од 1–10imp/s .

Задаци:

1. Поставити извор ^{137}Cs на положај 1 статива за радиоактивни извор.
2. Док је извор у положају 1 измерити број импулса са ГМ борјачем уређаја КОМО-ТМ и јачину експозиционе дозе са алармним гама монитором.
3. Мерења одрадити за 10 положаја извора на стативу.
4. Нацртати криву која даје број импулса извора у функцији од измерне јачине експозиционе дозе.
5. Методом најмањих квадрата одредити коефицијент правца праве (видети Додатак).
6. Одредити фактор калибрације и припадајућу меру несигурност.

Са графика се може уочити да је интензитет бројања ГМ борјачем КОМО-ТМ -а линеарна функција у зависности јачине експозиционе дозе. Тако је могуће одређивањем коефицијента правца праве извршити калибрацију КОМО-ТМ -а на јачину експозиционе дозе.

Како је са графика $I(\text{cps}) = a \cdot \dot{X}(\text{pA/kg})$, константа калибрације k се може одредити као

$$k = \frac{1}{a}.$$

Сада се може за произвољан извор зрачења конвертовати брзина бројања КоМОТМ-а у јачину експозиционе дозе:

$$\dot{X}_{\text{непознатог узорка}}(\text{pA/kg}) = k \cdot I_{\text{непознатог узорка}}(\text{cps}).$$

5.3 ГАМА СПРЕКТРОМЕТРИЈСКА АНАЛИЗА

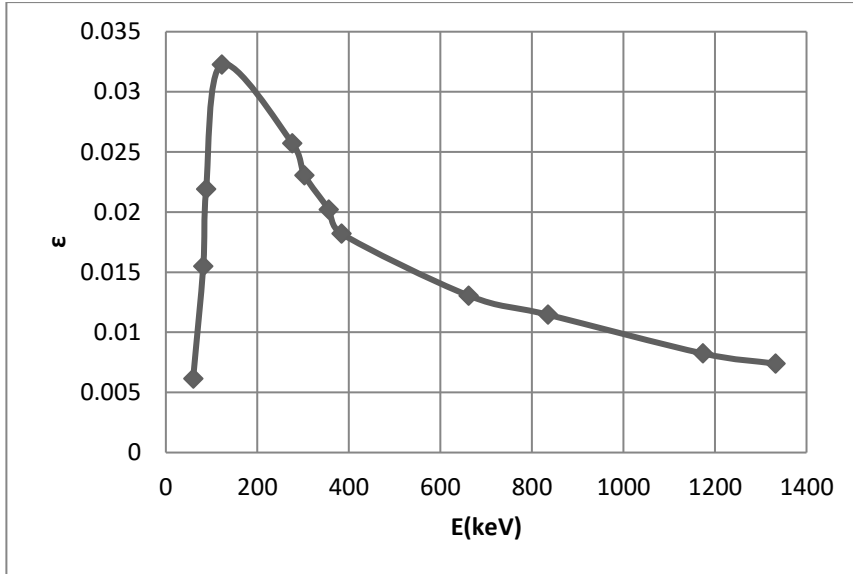
Калибрација енергетске ефикасности HpGe детектора

Гама спектрометријска анализа је поступак идентификације радионуклида у узорцима који се испитују као и мерење њихове активности. Због продорности гама зрачења гама спектрометријска анализа захтева једноставну припрему и обраду узорка. У зависности од узорка, узорак је потребно физички третирати, уситњавањем и дехидратацијом до константне масе узорка. Тако припремљен узорак се поставља у маринели посуду која служи за стандардизацију геометрије узорка. Коришћењем посуде стандардиозване величине и облика, осигурава се да је геометрија узорка при сваком мерењу истоветна. Калибрација детектора за такву геометрију је омогућена коришћењем стандардних извора – смеше радионуклида познате активности, смештене у маринели посуду.

Постављањем маринели посуде са стандардом за калибрацију и аквизицијом импулса за дужи временски интервал (неколико сати), добија се спектар стандардног извора који служи за калибрацију детектора на дату геометрију Маринели посуде. Анализом спектра и коришћењем познате активности стандардног извора, може се одредити ефикасност гама линија које постоје у спектру извора:

$$\varepsilon_i = \frac{N_i}{A_i \cdot t \cdot \eta_i}.$$

Цртањем графичке зависности $\log_{10} \varepsilon$ од $\log_{10} E$ и интерполирањем тачака полиномном функцијом, добија се зависност која представља калибрациону криву ефикасности детектора. На слици 5.3 представљена је крива ефикасности одређена на HPGE детектору.



Слика 5.3 Крива ефикасности детектора

Одређивање активности узорка

После калибрације детектора, припремити узорак, измерити његову масу и поставити у Маринели посуду. Маринели посуду са узорком поставити на детектор. Мерити на гама спектрометру у временском интервалу од $t = 3$ h.

Активност одређеног радионуклида за дату гама линију се одређује релацијом:

$$A = \frac{N}{\varepsilon \cdot t \cdot \eta}, \text{ где је}$$

N – укупан број импулса под пиком дате гама линије,

ε - ефикасност детекције за линију дате енергије за мерену геометрију.

t – време мерења узорка,

η – принос дате линије

Да би се добила активност по јединици масе потребно је измерену активност поделити са укупном масом узорка.

Природни радионуклиди, чија се концентрација одређује у узорку из животне средине су:

²²⁶Ra, преко гама линија

²¹⁴Pb 351.9 keV, $\gamma=0.376$, $\epsilon=0.109$

²¹⁴Bi 609.3 keV, $\gamma=0.461$, $\epsilon=0.026$

²³²Th, преко гама линија

²²⁸Ac 911.1 keV, $\gamma=0.258$, $\epsilon=0.0233$

968.9 keV $\gamma=0.158$, $\epsilon=0.024$

²⁰⁸Tl 583.01 keV $\gamma=0.845$, $\epsilon=0.027$

860.56 keV, $\gamma=0.124$, $\epsilon=0.0228$

⁴⁰K, преко гама линије

⁴⁰K 1460.7 keV. $\gamma=0.11$, $\epsilon=0.0211$

Вештачки радионуклид који може бити присутан у узорцима из животне средине је:

¹³⁷Cs, преко гама линије

^{137m}Ba 661.6 keV, $\gamma=0.851$, $\epsilon=0.0239$

Ефикасности дате у горњим изразима је потребно одредити у овој вежби.

Концентрација радијума се не може директно одредити, већ се процењује преко активности краткоживећих потомака, који су гама емитери. Да би активност радијума била једнака активности олова и бизмута у низу, потребно је да се испуни услов секуларне равнотеже. Радијум ће бити у равнотежи са радоном за око 7 времена поураспада радона, што износи око месец дана. Због тога је потребно припремити узорак, поставити у маринели посуду и заптити узорак смолом, како не би радон цурео. Тако припремљен узорак мерити после месец дана, када се очекује да је успостављена равнотежа.

Границе излагања и гама индекс

Границе радиоактивне контаминације грађевинског материјала који се употребљава у високој градњи за ентеријер износе:

за радијум (^{226}Ra) - $2 \cdot 10^2 \text{ Bq/kg}$;

за торијум (^{232}Th) - $3 \cdot 10^2 \text{ Bq/kg}$;

за калијум (^{40}K) - $3 \cdot 10^3 \text{ Bq/kg}$;

за збир активности свих **вештачких** радионуклида - $4 \cdot 10^3 \text{ Bq/kg}$;

Гама индекс дефинисан следећом једначином, мора бити мањи од 1:

$$I = \frac{C_{Ra}}{200} + \frac{C_{Th}}{300} + \frac{C_K}{3000} + \frac{C_{Cs}}{4000}$$

Границе радиоактивне контаминације грађевинског материјала који се употребљава у високој градњи за екстеријер износе:

за радијум (^{226}Ra) - $4 \cdot 10^2 \text{ Bq/kg}$;

за торијум (^{232}Th) - $3 \cdot 10^2 \text{ Bq/kg}$;

за калијум (^{40}K) - $5 \cdot 10^3 \text{ Bq/kg}$;

за збир активности свих **вештачких** радионуклида - $4 \cdot 10^3 \text{ Bq/kg}$;

Гама индекс мора бити мањи од 1:

$$I = \frac{C_{Ra}}{400} + \frac{C_{Th}}{300} + \frac{C_K}{5000} + \frac{C_{Cs}}{4000}$$

Границе радиоактивне контаминације грађевинског материјала који се употребљава у нискоградњи као подлога за путеве износе:

за радијум (^{226}Ra) - $7 \cdot 10^2 \text{ Bq/kg}$;

за торијум (^{232}Th) - $5 \cdot 10^2 \text{ Bq/kg}$;

за калијум (^{40}K) - $8 \cdot 10^3 \text{ Bq/kg}$;

за збир активности свих **вештачких** радионуклида $> 2 \cdot 10^3 \text{ Bq/kg}$;

Гама индекс мора бити мањи од 1:

$$I = \frac{C_{Ra}}{700} + \frac{C_{Th}}{500} + \frac{C_K}{8000} + \frac{C_{Cs}}{2000}$$

Индустријски отпадни материјал не може се одлагати у животну средину ако је садржај природних радионуклида таквог материјала већи од прописаних граница радиоактивне контаминације и то::

за радијум (^{226}Ra) > $4 \cdot 10^3 \text{ Bq/kg}$;

за торијум (^{232}Th) > $3 \cdot 10^3 \text{ Bq/kg}$;

за калијум (^{40}K) > $5 \cdot 10^4 \text{ Bq/kg}$;

за збир активности свих вештачких радионуклида > $1 \cdot 10^4 \text{ Bq/kg}$;

Гама индекс мора бити мањи од 1:

$$I = \frac{C_{Ra}}{200} + \frac{C_{Th}}{300} + \frac{C_K}{3000} + \frac{C_{Cs}}{4000}$$

Задаци:

Припремити изван грађевински материјал и оставити узорак како би се равнотежа успоставила. Извршити гамаспектрометријску анализу узорака, одредити гама индекс и проверити да ли је дозвољено дати материјал користити у грађевинске сврхе.

5.4 ОДРЕЂИВАЊЕ УКУПНЕ БЕТА АКТИВНОСТИ УЗОРАКА ИЗ ЖИВОТНЕ СРЕДИНЕ

Присуство радионуклида у животној средини доводи до изложености становништва радиоактивном зрачењу. Како би излагање становништва било у оквиру прописаних граница, неопходно је стално вршити анализу узорака животне средине и одређивати концентрације радионуклида у животним намирницама. Последњих деценија, примена нуклеарне енергије у разне сврхе, довела је до повећаног садржаја вештачких радионуклида у намирницама из животне средине. Концентрацију како вештачких тако и природних радионуклида је потребно континуирано пратити. У посебним, ванредним условима, који могу бити услед нуклеарних акцидента или употребе нуклеарног оружја, контаминацију животне средине је могуће утврдити одређивањем специфичне бета активности у узорцима животне средине. У овој вежби одређивање се специфична бета активност намирница.

Бета активност у намирницама потиче од природних радионуклида који су присутни у животној средини. Поред природне радиоактивности, допринос укупној бета активности узорка може потицати и од бета зрачења вештачких радионуклида. Мерење укупне бета активности треба да омогући одређивање присутности вештачких радионуклида у узорцима. Око 90% укупне природне бета активности у биљним и животињским узорцима потиче од бета распада ^{40}K . Овај изотоп је присутан у природној изотопској смеси калијума са 0,0118%. Човек исхраном дневно уноси око 100Bq ^{40}K .

Како би се одредила специфична бета активност узорка, потребно је као и у сваком поступку релативног одређивања неке физичке величине, стандардизовати поступак мерења и омогућити што сличније услове при мерењу активности познатог и непознатог узорка. Као стандардни извор, тј. еталон за одређивање специфичне активности се користи KCl, који садржи ^{40}K са периодом полураспада $T = 1,251 \cdot 10^9$ година и бета је емитер са 88% бета зрачења. Од KCl се најчешће припремају два стандардна извора масе 250g и 500g. Од минералног остатка узорка из животне средине се такође припремају два узорка датих маса на исти начин.

Мерни инструмент за одређивање укупне бета активности који се користи у овој вежби је ЛАРА5, која има антикоинцидентно ГМ бројачко коло, са оловном заштитом, за мерење ниских активности. Стандардни извор и узорци се мере у серијама од по три или више мерења, где се између мерења узорка мери и основно зрачење, тј. фон.

Како ниво фона не прелази пар импулса по минути, време мерења стандарда, узорка и фона треба да буде 10 минута, тако да релативна грешка буде мања од 10%. Време мерења за релативну грешку од 10% се може приближно проценити на основу релације:

$$t = \frac{k^2}{\sigma^2} \left(I_u + \frac{I_0}{c} \right),$$

где је k -степен поузданости мерења, σ - стандардна девијација серије мерења, I_u - брзина бројања узорка и imp/min , I_0 - брзина бројања фона у imp/min ,

$$c = \frac{t_0}{t} = \sqrt{\frac{I_0}{I_u}}, \quad t_0 - \text{време мерења фона и } t - \text{време мерења узорка.}$$

За време мерења фиксирано на 10min , релативна грешка мерења може бити мања или већа од 10% , у зависности од брзине бројања узорка и фона. Уколико је брзина бројања узорка приближна брзини бројања стандарда, релативна грешка мерења износи око $3-5\%$.

После одређивања брзине бројања стандардног извора и узорка, статистичке обраде и корекције на фон, добијене вредности се изражавају у виду односа:

$$a = \frac{I_{a_1}}{I_{a_2}} \quad \text{и} \quad b = \frac{I_{b_1}}{I_{b_2}},$$

где је I_{a_1} брзина бројања у imp/min минералног остатка узорка масе 500g , I_{a_2} брзина бројања у imp/min минералног остатка узорка масе 250g , I_{b_1} брзина бројања у imp/min стандардног узорка масе 500g , I_{b_2} брзина бројања у imp/min стандардног узорка масе 250g .

У случају када вредност константе a лежи у интервалу:

$$b - \sigma_b < a < b + \sigma_b,$$

претпоставља се да измерена бета активност узорка потиче од природне радиоактивности, тј. од ^{40}K . Ова претпоставка нужно не мора бити истинита и може се проверити одређивањем укупног калијума у узорку неком другом методом (хемијском, гамаспектрометријом, ...). На основу садржаја укупног калијума у датим узорцима може се израчунати специфична бета активност узорка, с обзиром да се зна да 1g калијума даје $26,51\text{Bq}$ чисте бета активности. Уколико вредност константе a не задовољава претходну релацију, ове узорке је потребно мерити на гама спектрометру ради идентификације присутних радонуклида.

Ова метода мерења укупне бета активности има ограничење у примени које се огледа у појави самоапсорпције бета зрачења у узорку и стандарду. Како би ова метода била применљива за узорке из животне средине, потребно је да се фактори самоапсорпције не разликују знатно. На другој страни предност ове методе је у једноставности и могућности коришћења као рутинске методе.

Поступак испитивања укупне бета активности почиње припремом стандардних узорка и минералних остатака узорака из животне средине. Првенствено се одређује брзина бројања стандардних узорака од 10 до 20 пута по 10 минута. Затим се одреди средња вредност брзине бројања, која је коригована на фон и стандардна грешка изражена преко стандардне несигурности. После тога се одреди однос који дефинише вредност константе b и припадајућа стандардна грешка изражена преко стандардне девијације, чија се вредност може одредити пропагацијом систематске грешке. Узима се да су мерења међусобно некорелисана и стандардна девијација σ_b се може одредити као:

$$\left(\frac{\sigma_b}{b}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{b_1}}{I_{b_1}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{b_2}}{I_{b_2}}\right)^2,$$

где су σ_{b_1} и σ_{b_2} стандардне девијације мерења I_{b_1} и I_{b_2} , респективно.

Узорковање и припрема узорка

Узорци из животне средине за које је потребно вршити редовну контролу на укупну бета активност су разне намирнице, вода, сокови, сточна храна и др. Како се ради о ниским бета активностима у узорцима, потребно је изоловати радиоактивне компоненте и смањити ефекте расејавања и самоапсорпције зрачења у узорку. Због тога је редак случај да се одређивање укупне бета активности врши на сировим узорцима, већ се користе разни поступци (физички, хемијски, ...) за концентрисање природних радиоактивних материја.

Начин сакупљања одређене врсте узорка зависи од врсте узорка, методе која се користи за препарацију узорака и њихово испитивање и др. Приликом узимања узорака из животне средине, рецимо за испитивање пијаћих или текућих вода, често се праве композитни узорци. Ови узорци се добијају узорковањем на више локација прављењем композите смеше, која представља један композитни узорак. На пример, при узорковању бунарске воде, вода се узоркује са површине, средине и дна бунара, при чему се води рачуна да се избегава мешање и замућивање воде. Присуство талога у малим количинама или било које врсте суспензије, чак и присуство микроорганизама, може у многоме да утиче на резултат мерења укупне бета активности. Приликом узорковања воде укупна довољна количина износи један литар. Минимална количина воде која се мора узорковати износи око 250 mL, због количине сувог остатка који је потребан за мерење укупне бета активности. Узимање узорака намирница биљног и животињског порекла се врши директно са места на којем се намирнице користе. Количина коју је потребно узети зависи од

врсте узорка, тј. пре свега од количине минералног остатка који се добија од ових узорака.

Поступци припреме узорака зависе од врсте узорка и поступка који води до концентрисања радионуклида и битно утичу на крајњи резултат и тачност методе и веома је битно да се овај поступак изводи пажљиво и прецизно. Концентрисање узорака намирница се врши процесом минерализације, којим се добија минерални остатак у коме су радионуклиди сачувани у највећој мери у односу на сиров узорак. Постоје случајеви у којима се у поступку минерализације делимично или у потпуности губе одређени радионуклиди. Овај губитак зависи од врсте радионуклида, физичких и хемијских својстава узорака, температуре на којој се врши минерализација и др. Због тога је потребно минерализацију узорака вршити на начин при којем су губици минимални. Најчешћи начини минерализације узорака намирница су суво и влажно спаљивање. Метода влажног спаљивања је посебно погодна за масне узорке хране при одређивању стронцијума или цезијума, при чему се може користити смеша глицерина и алкохола у односу 1:10 за спаљивање. Пре спаљивања потребно је узорке сушити у сушници на температури од 105⁰С неколико сати, како би се одстранила присутна вода. Сушење се прекида када се достигне константна маса узорка. После сушења узорци се могу суво или влажно спаљивати у порцуланским шољама на решоу или под инфрацрвеном лампом. Поступак минерализације се завршава методом сувог спаљивања у пећима за жарене, почевши од температуре од 200⁰С, при којој се угљенишу органске материје до температуре од 300⁰С до 450⁰С, када настаје потпуна минерализација узорка. Добијени минерални узорци се хомогенизују мрвљењем у авану и чувају се у ексикатору.

За припремање узорака воде, користи се метода упаравања воде на температури од 60–70⁰С, због минималног губитака радионуклида. Најчешће 400ml воде се упарава у плитким посудама које су обложене пластичном фолијом. Разлог за ово је како се по процесу упаравања суви остатак не би гребао и скидао са зидова посуде, већ се прибегава сувом спаљивању и жарену упареног остатка заједно са пластичном фолијом на температури од 450⁰С. Минерални остатак се хомогенизује и чува у ексикатору. Узорци млека се упаравају у воденом купатилу или под инфрацрвеним лампама, где притом је довољна запремина узорка од 200ml. Суви остатак се жари на температури од 450⁰С.

По извршеној минерализацији узорака потребно је припремити извор зрачења од минералног остатка узорка. У поступку минерализације, потребно је водити евиденцију о количини узорка који се користи. Потребно је забележити почетну масу свежег узорка и потом одредити добијену масу минералног остатка. Минерални остатак се препарише у посудама за изворе, чија се активност претходно мора измерити. Препарација се врши тако да се у две металне посуде за изворе зрачења одмери 250g и 500g минералног

остатка. Минерални узорак се поравна у посуду и може се учврстити са неколико капи раствора плекси-стакла у ацетону. Овако припремљеном узорку зрачења се може мерити укупна бета активност.

Стандардни извори KCl се припремају на истоватан начин као и обични узорци.

Мерни уређај LARA5

Мерни уређај LARA5 се састоји од антикоинцидентног бројачког кола, које се састоји од два халогена ГМ бројача и које је окружено оловном заштитом. Оваква израда мерног уређаја омогућава снижење нивоа фона до брзине бројања од 1 до 2 импулса у минути. На тај начин омогућава се мерење брзине бројања бета активности у узорцима који имају веома малу активност. Антикоинцидентна спрега између два ГМ бројача уграђена у уређају LARA5 омогућава селекцију импулса на основу временског кашњења сигнала у две бројачке цеви. Мртво време оваквог бројачког система је занемарљиво мало, узимајући у обзир ниске активности које уређај мери. Електронски инструмент за приказивање мерних резултата се састоји од дисплеја на коме се приказују бројеви импулса измерени за унапред задати временски интервал. Постоји и могућност мерења у неограниченом временском моду, када је потребно време мерити независно од уређаја и зауставити рад уређаја после жељеног временског периода. На оловном кућишту налазе се врата са лежиштем за посуду у којој се смешта узорак. Изгледа бројачког система LARA5 приказан је на слици 28.



Слика 5.4 Уређај за мерење ниских бета активности LARA5

Пре мерења бета активности узорка потребно је проверити исправност рада бројача, као и читавог уређаја. То се може урадити мерењем неког стандардног извора или мерењем фона. При мерењу стандардног извора, потребно је извршити серију мерења и статистички је обрадити. За ову методу потребно је поседовати стандард бета зрачења активности доста већих од фона.

Провера исправности мерног уређаја контролисањем фона се може извршити свакодневним мерењима фона минимално три пута по десет минута у току дана. Притом у кућиште поставити празну посуду ради константне геометрије мерења. За израду контролног дијаграма кретања фона, потребно је вршити мерења у току 60 дана. Вредности се усредњавају на основу дневних мерења за сваки дан понаособ. Коришћењем мерења за првих месец дана одреди се средња вредност брзине бројања фона и припадајућа стандардна девијација. Вредности фона добијеног у наредних 30 дана треба да буде у интервалу $\pm 2\sigma$ са вероватноћом од око 95%. Ради јасноће приказа погодно је нацртати контролни дијаграм у коме се на апциси наносе вредности од 1-30, а на ординати брзине бројања уређаја. Погодно је нацртати три хоризонталне праве чије ординатне вредности износе редом $I - 2\sigma, I, I + 2\sigma$, где је I средња вредност брзине бројања фона за првих 30 дана.

Поред провере исправности мерног уређаја потребно је одредити ефикасност детекције мерног инструмента. Како детектори LARE5 нису у 4 π геометрији, геометријска ефикасност је мања од јединице и детектор не може регистровати све распада у узорку. Просторни угао под којим се види детектор од стране извора зрачења дефинише геометријску ефикасност детекције зрачења. Врста и енергија зрачења такође утичу на ефикасност детекције, узимајући у обзир да један детектор не може бити исто осетљив на све врсте и енергије зрачења. Такође од саме врсте бројача зависи ће ефикасност детекције. На крају и сам извор зрачења ће утицати на брзину бројања детектора. Услед самоапсорпције у извору може доћи до умањења брзине бројања. Ефекат расејања зрачења од зидова инструмента и посуде у којем је извор смештем може, за разлику од самоапсорпције довести до повећања броја регистрованих кваната зрачења. Све ове ефекте треба предвидети и отклонити коришћењем тзв. корекционих фактора. Корекцијом брзине бројања на све факторе, може се доћи до укупног броја честица које емитује дати извор.

Једноставнији начин долажења до укупног броја кваната израченог од стране извора представља релативна калибрација. Код релативне калибрације потребно је поседовати еталон извор познате активности. Мерењем брзине бројања еталона и непознатог узорка и упоређивањем ових вредности представља релативну калибрацију уређаја:

$$\frac{I_i}{A_i} = \frac{I_e}{A_e},$$

где је I_i брзина бројања мереног извора, A_i активност мереног извора, I_e брзина бројања еталона зрачења и A_e активност еталона извора. Однос $\frac{I_e}{A_e}$ представља ефикасност детекције и изражава се у процентима:

$$\varepsilon = \frac{I_e}{A_e} \cdot 100\% .$$

Одређивање ефикасности уређаја представља калибрацију датог мерног инструмента. Притом се мора водити рачуна да еталон и извор имају исте или сличне карактеристике и врсту зрачења које емитују. Познавањем ефикасности, може се одредити активност непознатог извора на основу његове брзине бројања:

$$A_i = \frac{I_i}{\varepsilon} \cdot 100 .$$

Одређивање ефикасности LARE5 могуће је коришћењем KCl-а као стандардног извора, од којег се креира више еталона различитих дебљина KCl-а. Сваки еталон се мери већи број пута, од 10 до 20, у интервалу времена од 10 минута. Свака серија мерења се статистички обрађује, а ефикасност за сваку дебљину понаособ се одређује једначином:

$$\varepsilon_i = \frac{I_i}{m \cdot A_s} ,$$

где је I_i брзина бројања еталона i -те дебљине кориговане на фон, m маса KCl-а и A_s представља специфичну активност KCl-а. A_s се може одредити познавајући период полураспада ^{40}K , које износи $T = 1,30 \cdot 10^9$ година и масу $m_0 = 6,2 \cdot 10^{-5}$ g ^{40}K у једном mg KCl-а:

$$A_s = \frac{\ln 2}{T} \cdot \frac{m_0}{M} = 0,834 \frac{\text{raspada}}{\text{min} \cdot \text{mg}} .$$

Како би се добиле информације о самоапсорпцији и рефлексiji унутар извора потребно је препарисати барем 9 узорака KCl-а, од 50, 100, 150, 200, 250, 300, 400, 500 и 700 mg . Како се различите масе узорка стављају у исте планшете - посуде за смештање припремљених узорака, еталони различитих маса, имаће различите дебљине. Цртањем зависности ефикасности LARE5 од масе узорка, добија се функционална зависност ефикасности од масе узорка, где се очекује приближно линеарна зависност. Одређивањем функционалне зависности, тј. једначине праве, могуће је репродуковати ефикасност детектора за произвољну масу узорка. Ефикасност детекције LARE5 је око 10%, зависно од дебљине извора.

САМОАПСОРПЦИЈА У УЗОРКУ

При проласку бета зрачења кроз материју долази до апсорпције зрачења у самом узорку. Овај процес се назива самоапсорпција. При мерењу бета активности узорка, не мери се стварна активност узорка, већ активност која је умањена услед појаве самоапсорпције. Уколико се ради о изворима бета зрачења код којих је средња енергија бета спектра релативно мала ($< 0,4 \text{ MeV}$), самоапсорпција посебно долази до изражаја. Код бета спектра већих средњих енергија бета честица, зрачење изгуби део своје енергије, али успева у већини да дође до детектора. Слабљење зрачења услед апсорпције је експоненцијалног карактера и карактерише се коефицијентом апсорпције. Коефицијент апсорпције карактерише смањење зрачења по јединици дужине апсорбера. У употреби је и масени коефицијент апсорпције. Експоненцијална зависност закона апсорпције је карактеристика тачкастих извора. У случају извора коначних димензија, коефицијент нагомилавања зрачења се узима у обзир, који у општем случају представља полиномну функцију, којом се врши поправка, тј. коригује одступање од експоненцијалног закона. У случају бета бројања у узорцима које се мере инструментом LARA5 може се сматрати приближно важеће експоненцијалног закона апсорпције зрачења:

$$I = I_0 e^{-\mu x},$$

где је I мерена брзина бројања, тј. интензитет зрачења, I_0 брзина бројања у случају када не би долазило до самоапсорпције, x дебљина апсорбера изражена у mg/cm^2 и μ масени коефицијент апсорпције изражен у cm^2/mg .

Како је у случају самоапсорпције извор зрачења истовремено и апсорбер, повећавањем дебљине извора, повећаваће се и брзина бројања, с обзиром да се повећава број радионуклида, тј. активност извора. Међутим овај тренд раста ће имати само до одређене дебљине, када дебљина извора постане већа од димензија бета зрачења које се емитује из извора. Тада даљим повећањем дебљине, брзина бројања не расте, јер долази до потпуне самоапсорпције бета честица у узорку. Функција која описује ову промену је функција експоненцијалног раста до одређеног максимума:

$$I = I_0 (1 - e^{-\mu x}).$$

Експерименталним одређивањем ове криве може се одредити коефицијент апсорпције и извршити корекција брзине бројања на дебљину узорка. Коефицијент самоапсорпције се одређује користећи узорке припремљене као и за одређивање ефикасности детектора. Коефицијент апсорпције треба одредити и за еталон и за минерални остатак узорка. Уколико су ови коефицијенти приближно једнаки и уколико су у питању мале дебљине апсорбера, није потребно вршити корекцију на дебљину узорка.

Одређивање специфичне бета активности

Познавањем ефикасности детектора, фактора самоапсорпције, количине почетног узорка и количине минералног остатка узорка може се одредити специфична бета активност узорка:

$$A_s = \frac{I \cdot e^{-\mu x} \cdot 100 \cdot P}{\varepsilon \cdot m \cdot 2,22},$$

где је I брзина бројања коригована на фон дата у imp/min , P количине минералног остатка по килограму односно литру свежег узорка, m маса минералног остатка изражена у грамима и A_s је специфична бета активност изражена у pCi по килограму или литру свежег узорка.

Задаци:

1. Проверити исправност рада и козистентност мерних резултата мерењем фона. Измерити брзину бројања фона у серији од 7 мерења по 10 минута, од којих су 5 радна, а 2 контролна (резервна). Проверити козистентност серије мерења користећи Шевененов критеријум. Одредити средњу вредност и стандардну девијацију.
2. Одредити ефикасност мерног уређаја LARA5 методом стандардног извора, за дебљину извора 500mg и 250mg KCL-а. Добијене резултате статистички обрадити и израчунати ефикасност.
3. Нацртати криву самоапсорпције за неки узорак из животне средине. Припремити 9 узорака на описан начин и измерити брзине бројања. Сваки узорак мерити 30 минута или 3 пута по 10 минута. Извршити корекцију на фон и нацртати график зависности брзине бројања од дебљине. Одредити коефицијент апсорпције зрачења.
4. Измерити специфичну бета активност неког узорка из животне средине. Припремити два извора зрачења маса 250mg и 500mg. Забележити све релевантне величине и измерене вредности. Одредити односе брзине бројања еталона и узорка из животне средине, a и b . Донети закључак о пореклу бета активности. Израчунати специфичну активност свежег узорка.

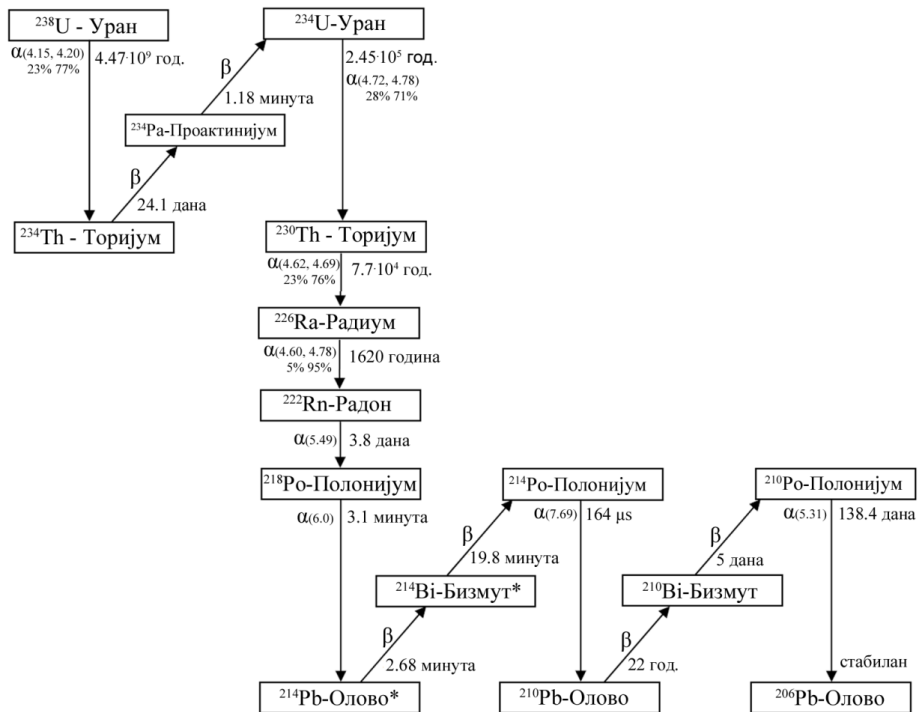
5.5 МЕРЕЊЕ КОНЦЕНТРАЦИЈА РАДОНА И ТОРОНА У ВАЗДУХУ ВОДИ И ЗЕМЉИШТУ

Радон (^{222}Rn) је радиоактиван гас без боје, мириса и укуса. Настаје алфа распадом радијума ^{226}Ra ($T_{1/2} = 1620$ год.), који је саставни део Земљине коре и јавља се у радиоактивном низу ^{238}U ($T_{1/2} = 4,46 \cdot 10^9$ год.), слика 5.5. Радон спада у VIIIa групу периодног система елемената и као племенит гас, хемијски је инертан и не гради једињења. Због те особине радон може да напусти материјал у коме је настао распадом ^{226}Ra . Дифузија је један од главних процеса миграције радона од места настанка. Период полураспада, $T_{1/2}$, ^{222}Rn је 3,825 дана. Распада се емисијом алфа честице енергије 5,49 MeV. Распадом ^{222}Rn настаје ^{218}Po , који је у атомском стању, слободан и у тренутку стварања је позитивно наелектрисан. Овај радонов потомак је такође радиоактиван са периодом полураспада $T_{1/2} = 3,05$ минута. Распада се емитовањем алфа честице енергије 6 MeV и притом настаје атом ^{214}Pb који је други у низу краткоживећих радонових потомака.

Новонастали атом ^{214}Pb има почетну енергију од 117 keV приликом настанка и притом доживљава узмак. Уколико је атом ^{218}Po пре распада био припојен за честицу аеросола, енергија узмака ^{214}Pb је довољна да се овај атом одвоји од честице са одређеном вероватноћом. На тај начин настаје слободан атом ^{214}Pb . ^{214}Pb је такође радиоактиван, и распада се β^- емисијом на ^{214}Bi . Распад прати емисија γ зрачења. Његов период полураспада је, $T_{1/2} = 26,8$ минута.

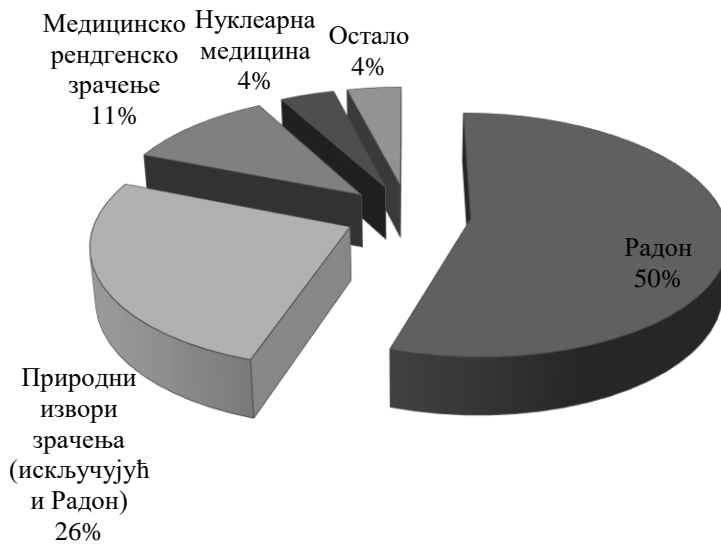
Атоми ^{214}Bi који настају распадом припојених атома ^{214}Pb остају припојени аеросолу, јер језгра ^{214}Bi настала након бета распада немају довољну енергију узмака да би се одвојила. Период полураспада ^{214}Bi , који је β^- радиоактиван, је $T_{1/2} = 19,8$ минута. Последњи елемент у низу радиоактивног распада ^{238}U је ^{206}Pb .

Радон, ^{222}Rn , је радиоактивни елемент који заједно са својим краткоживећим потомцима има највећи удео у укупном излагању људи. ^{222}Rn и његови потомци имају допринос од око 50% у укупном излагању опште популације, узимајући у обзир и природне и вештачке изворе зрачења. Сви остали природни извори зрачења имају удео од око 26%, а затим следе вештачки извори, од којих је најзначајнија дијагностичка радиологија. На слици 5,6 приказана је расподела доприноса разних извора који учествују у озрачивању опште популације.



Слика 5.5 Дијаграм распада ^{238}U радиоактивног низа са временом полуживота сваког радионуклида и енергијом α честица у MeV-има.

Потомци ^{222}Rn присутног у атмосфери се могу таложити у земљишту или у воденим системима, где преко биљака и животиња доспевају у ланац исхране. Концентрација радона на отвореном простору је обично мања од $10 \text{ Bq} \cdot \text{m}^{-3}$. Ова концентрација не представља значајну радијациону опасност. Међутим, у затвореним просторијама са слабом вентилацијом радон се акумулира. Концентрација радона може достићи висок ниво у случају када је јачина извора радона велика, а вентилација слаба. Високе концентрације радона реда величине неколико стотина $\text{Bq} \cdot \text{m}^{-3}$ и више и представљају значајну радијациону опасност.



Слика 5.6 Релативни значај појединих извора зрачења који доприносе популационој дози

Радонови потомци су знатно опаснији по човека од самог радона. Радон доприноси инхалационој дози свега око 1%, док осталих 99% доприносе краткоживећи радонови потомци ^{218}Po , ^{214}Pb . Након удисања они се таложе на унутрашњим слојевима дисајних путева, где се распадају, или се различитим механизмима преносе у крвоток и гастроинтестинални тракт.

Референтне вредности просечних концентрације радона у амбијенталном простору по препоруци не треба да превазилазе 100Bq/m^3 . У случају да ова вредност не може бити испуњена из објективних разлога (типа градње куће, локације и сл.) концентрација радона не треба да пређе 300Bq/m^3 . Концентрација радона у земљишту може варирати у великом опсегу и до више стотина kBq/m^3 на такозваним врућим тачкама (hot spots), док је референтна вредност концентрације радона у води $0,15\text{Bq/L}$.

Постоје већи број различитих метода за мерење концентрације радона, које се могу поделити на активне и пасивне. Код активних метода врши се филтрација ваздуха или воде и радон гас се директно упумпава у мерни инструмент, који потом одређује концентрацију радона. Пасивне методе подразумевају мерење радона дужи временски период, при којем се детектори остављају на локацији на којој се мерење врши. Као резултат пасивних метода добијају се усредњене вредности концентрације радона за мерени временски период. Код активних метода могуће је мерити радон у краћим временским

интервалима и на тај начин доћи до тренутних вредности концентрације радона.

У овој вежби користи се активни монитор који је у могућности да мери концентрацију радона – РАД7. РАД7 је дизајниран да детектује α зрачење које емитују радон и његови потомци. РАД7 користи полупроводнички детектор, који може да дискриминише енергије алфа зрачења, тј. ради у спектрометријском моду. Радну запремину РАД7 инструмента чини полусфера запремине 0,7 L, која је пресвучена проводним материјалом. Силиконски алфа детектор је емештен у центру полусфере. Електрично поље унутар полусфере обезбеђено је потенцијалном разликом од 2000–2500 V између детектора и зидова полулопте, тако да усмерава позитивно наелектрисане честице ка детектору. Приликом детекције честице, информација о детекцији и енергији алфа честице се чува у спектру. Интервал енергија од 0–10 MeV је подељен на 200 канала ширине 0,05 MeV -а. Укупни одброј у сваком каналу се повећава при детекције алфа честице енергије која одговара датом каналу.

РАД7 је калибрисан за мерење концентрације у ваздуху и води. Усисава ваздух из мерене средине, филтрира га од аеросола и радонових потомака и такав доводи до радне запремине детектора. Филтер задржава све тешке метале и аеросоле, осим радона, који је инертан гас и не везује се, те може проћи кроз филтер. Распадом радона унутар јонизационе коморе детектује се алфа зрачење радона и његових потомака насталих распадом радона унутар коморе. Знајући количину ваздуха која се филтрира у току времена, може се одредити која је запремина ваздуха пропуштена кроз комору и на основу тога довести у везу активност у комори са активношћу по јединици запремине ваздуха у мереном окружењу.

Влага у ваздуху који се доводи до детектора који је под високим напоном, може оштетити детектор изазивајући пробој у њему. Због тога је битно да ваздух који РАД7 усисава буде изузетно сув. Влажност ваздуха не сме прећи 10%. Да би се обезбедили ови услови, користи се средство за исушивање ваздуха – десикант (CaSO_4). Ваздух се филтрира кроз десикант у коме се упија влага из ваздуха и на тај начин у детектор доспева исушен ваздух. Изглед RAD7 уређаја са назначеним елементима је приказан на слици 5.7. Уређај се контролише дугмићима MENU, ENTER, \leftarrow и \rightarrow . На LCD екрану се приказује статус уређаја и одабране опције менија. Цевчице за улаз и излаз ваздуха служе за усисавање ваздуха у радну запремину детектора и његово уклањање по извршеним мерењима. Испред улаза у РАД7 поставља се филтер, који ће филтрирати потомке и нечистоће из ваздуха. На тај начин само радон доспева у комору. Конектор RS-232 служи за серијску комуникацију између РАД7 уређаја и рачунара. РАД7 је опремљен софтвером за даљинско управљање уређајем и обрадом мерених података. По потреби РАД7 је опремљен са инфра црвеним штампачем који може штампати измерене вредности у току рада.



Слика 5.7 Изглед уређаја РАД7

Задатак у овој вежби је да користећи активни монитор концентрације радона РАД7 се измери концентрација радона у амбијенталном ваздуху, атмосферском ваздуху, земљишту и води. Упоредити измерене концентрације са референтним вредностима. За мерење концентрације радона у ваздуху довољно је повезати РАД7 са јединицом за исушивање ваздуха, преко које се ваздух усисава у детектор. Пре почетка мерења потребно је десетак минута пропуштати ваздух кроз РАД7, до тренутка када влажност опадне испод 10% . Тек тада је дозвољено почети са мерењем. Ово се омогућава одабиром опције ТЕСТ->PURGE коришћењем тастера и LCD монитора уграђених на РАД7 уређају. Започињање мерења се врши одабиром опције ТЕСТ->START. На сваких пола сата, приказиваће се измерене вредности концентрације радона.

Мерење концентрације радона у води и земљишту се ради на сличан начин као и у ваздуху, али се у овим случајевима ваздух пропушта кроз воду и испумпава из дубине земљишта. За мерење концентрације радона у води,

течност се смешта у стандардизоване посуде, кроз који ваздух кружи. За мерење концентрације радона у земљишту, сонда дужине метра се забија у земљу и омогућава да се ваздух испумпава из земљишта.

Задаци:

1. Према ЕРА протоколу мерење радона се врше 24 часа у просторији која није проветравана 12 часова пре почетка мерења. Реализовати једно овакво мерење концентрације радона у некој просторији. Мерне резултате штампати на сваких пола сата користећи IR штампач.
2. Измерити концентрацију радона на отвореном. Извршити три мерења по пола сата. Упоредити вредности концентрације радона у амбијенталном и атмосферском ваздуху. Коментарисати резултате.
3. Измерити концентрацију радона у пијаћој и бунарској води. Напунити посуду за мерење радона у води и повезати са јединицом за исушивање ваздуха. Упоредити измерене концентрације радона у пијаћој води из градске мреже и бунарској води.
4. Измерити концентрацију радона у земљишту на пар локација. Закуцати сонду до метра дубине у земљишту. Други крај сонде повезати са јединицом за исушивање ваздуха и мерити концентрацију радона у земљишту.

6 ДОДАТАК

6.1 МЕТОДА НАЈМАЊИХ КВАДРАТА

Нека измерени подаци припадају скупу $X \in \{x_i\}$ и $Y \in \{y_i\}$. Методом најмањих квадрата треба наћи ону праву која најмање одступа од свих тачака:

$$\bar{y} = a\bar{x} + b$$

Нека су x_i , y_i парови измерених вредности за које треба наћи праву која најмање одступа од свих тачака. За сваку вредност x_i дефинишимо одступање тачке на правој $y(x_i)$ од експерименталне тачке y_i (резидуи):

$$d_i = y_i - y(x_i) = y_i - ax_i - b$$

Желимо да сума свих резидуа, тј, укупно одступање буде минимално. Међутим по самој дефиницији резидуа добијамо:

$$\sum_{i=1}^N d_i = \sum_{i=1}^N (y_i - ax_i - b) = \sum_{i=1}^N y_i - a \sum_{i=1}^N x_i - b \sum_{i=1}^N 1 = N\bar{y} - Na\bar{x} - Nb = N(\bar{y} - a\bar{x} - b) = 0$$

где су $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$ и $\sum_{i=1}^N 1 = N$.

Зато је потребно наћи суму квадрата резидуа и наћи оне вредности за a и b за које ова сума има минимум.

$$\sum_{i=1}^N d_i^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - ax_i - b)^2$$

Потребно је наћи a и b из услова:

$$\frac{\partial}{\partial a} \sum_{i=1}^N d_i^2 = \frac{\partial}{\partial a} \sum_{i=1}^N (y_i - ax_i - b)^2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial b} \sum_{i=1}^N d_i^2 = \frac{\partial}{\partial b} \sum_{i=1}^N (y_i - ax_i - b)^2 = 0$$

$$-2 \sum_{i=1}^N (y_i - ax_i - b)x_i = 0$$

, тј.

$$-2 \sum_{i=1}^N (y_i - ax_i - b) = 0$$

$$\sum_{i=1}^N x_i y_i - a \sum_{i=1}^N x_i^2 - b \sum_{i=1}^N x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^N y_i - a \sum_{i=1}^N x_i - b \sum_{i=1}^N 1 = 0$$

, где је $\sum_{i=1}^N 1 = N$ и $b = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N y_i - a \sum_{i=1}^N x_i \right)$

Из друге једначине се одређује b и замењује у прву. Добијамо:

$$\sum_{i=1}^N x_i y_i - a \sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N y_i - a \sum_{i=1}^N x_i \right) \sum_{i=1}^N x_i = 0, \text{ тј.}$$

$$\sum_{i=1}^N x_i y_i - a \sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \sum_{i=1}^N x_i + a \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N x_i = 0$$

Сада се може изразити a као:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \sum_{i=1}^N x_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N x_i}.$$

Помноже се броилац и именилац разломка са $\frac{1}{N}$:

$$a = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i y_i - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i}, \text{ тј.}$$

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}$$

Како је $b = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N y_i - a \sum_{i=1}^N x_i \right)$, заменом a из предходног израза добија се

$$b = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i - \frac{\overline{xy} - \bar{x} \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \bar{y} - \frac{\overline{xy} - \bar{x} \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \bar{x} = \frac{\bar{y} \overline{x^2} - \bar{y} \bar{x}^2 - \overline{xy} \bar{x} + \bar{x} \bar{y} \bar{x}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2},$$

тј

$$b = \frac{\bar{y} \overline{x^2} - \bar{x} \overline{xy}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}.$$

На крају се добија

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \text{ и } b = \frac{\bar{y} \overline{x^2} - \bar{x} \overline{xy}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}.$$

Грешке коефицијената a и b се могу одредити одредити користећи:

$$\sigma^2(a) = \frac{\sigma^2}{N} \frac{1}{x^2 - \bar{x}^2} \text{ и } \sigma^2(b) = \frac{\sigma^2}{N} \frac{\bar{x}^2}{x^2 - \bar{x}^2}.$$

Горњи изрази за a и се могу трансформисати у следећи облик

$$\begin{aligned} a &= \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{x^2 - \bar{x}^2} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i y_i - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i}, \\ a &= \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i y_i - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i}, \\ a &= \frac{\frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N x_i y_i - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \sum_{i=1}^N x_i - \sum_{i=1}^N y_i \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i + N \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \right)}{\frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N x_i + N \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \right)}, \\ a &= \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i - \bar{y} \sum_{i=1}^N x_i - \sum_{i=1}^N y_i \bar{x} + N \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^N x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^N x_i + N \bar{x} \bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i - \bar{y} \sum_{i=1}^N x_i - \sum_{i=1}^N y_i \bar{x} + \sum_{i=1}^N \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^N x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^N x_i + \sum_{i=1}^N \bar{x}^2}, \\ a &= \frac{\sum_{i=1}^N (x_i y_i - \bar{y} x_i - y_i \bar{x} + \bar{x} \bar{y})}{\sum_{i=1}^N (x_i^2 - 2\bar{x} x_i + \bar{x}^2)} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i (y_i - \bar{y}) - \bar{x} (y_i - \bar{y}))}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}, \\ a &= \frac{\sum_{i=1}^N (x_i (y_i - \bar{y}) - \bar{x} (y_i - \bar{y}))}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}, \\ a &= \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}, \end{aligned}$$

тј. Добијају се познати изрази који се такође могу користити:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \text{ и } b = \bar{y} - a \cdot \bar{x}.$$

7 ЛИТЕРАТУРА

Arshak K, Korostynska O (Eds.). Advanced Materials and Techniques for Radiation Dosimetry. Artech house, INC. Norwood, MA, 2006.

Cember H, Johnson ET, Collins F (Eds.). Introduction to Health Physics. The McGraw-Hill Companies, Inc, 2009.

Eckerman KF, Cristy M, Ryman J C. The ORNL Mathematical Phantom Series. Oak Ridge National Laboratory Report (1996) Oak Ridge, TN, USA, Updated 2009.

Gruppen C. Introduction to Radiation Protection Practical Knowledge for Handling Radioactive Sources. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.

Guy C (Ed.). An Introduction to the Principles of Medical Imaging. Imperial College Press, London, UK, 2005.

Гусев НГ, Климанов ВА, Машкович ВП, Суворов АП. Физические основы защиты от излучений. 3-е издание, переработанное и дополненное, Том 1; Москва, Энергоатомиздат, 1989.

ICRP 26. Recommendations of the International Commission on Radiological Protection. Pergamon Press, Oxford, 1(3):1-53, 1977.

ICRP 51. Data for Use in Protection against External Radiation. ICRP Publication 51. Ann. ICRP 17:2-3, 1987.

ICRP 60. Recommendations of the International Commission on Radiological Protection. Pergamon Press, Oxford, 21(1-3):1-201, 1991.

ICRP 74. Conversion coefficients for use in radiological protection against external radiation, Pergamon Press, Oxford, 26(3-4), 1997.

ICRP 89. Basic Anatomical and Physiological Data for Use in Radiological Protection Reference Values. ICRP Publication 89, 32(3-4), 2002.

ICRP 92. Relative biological effectiveness (RBE), quality factor (Q), and radiation weighting factor w_R . Pergamon Press, Oxford, 33(4):1-121, 2003.

ICRP 103. Quantities used in radiological protection. Pergamon Press, Oxford, 37:247-322, 2007.

- ICRP 107. Nuclear Decay Data for Dosimetric Calculations. Pergamon Press, Oxford, 38(3):7-96, 2008.
- ICRP 110. Adult Reference Computational Phantoms. Realistic reference phantoms: An ICRP/ICRU joint effort. Elsevier, 39(3-5), 2009.
- ICRP 116. Conversion coefficients for radiological protection quantities for external radiation exposures. Pergamon Press, Oxford, 40(2-5):1-257, 2010.
- ICRU 51. Quantities and units in radiation protection dosimetry. Bethesda, Maryland, 1993.
- ICRU 63. Nuclear Data for Neutron and Proton Radiotherapy and for Radiation Protection. ICRU 63, 2000.
- Irodov IE. Problems in General Physics. English translation, Mir Publishers, 1981.
- Иванов ВИ, Климанов ВА, Машкович. Сборник задач по дозиметрии и защите от йонизирующих излучений. 4-е издание, переработанное и дополненное, Москва, Энергоатомиздат, 1992.
- Kawrakow I. Accurate condensed history Monte Carlo simulation of electron transport. I. EGSnrc, the new EGS4 version. Medical physics, 27, 2000.
- Крпић КД, Аничин ВИ, Савић МИ. Збирка решених задатака из опште нуклеарне физике. Научна књига, Београд, 1977.
- Krstic D, Nikezic D. Input files with ORNL-mathematical phantoms of the human body for MCNP-4B. Com. Phys. Commun. 176:33-37, 2007.
- Iniewski K (Ed.). Medical Imaging. Principles, Detectors, and Electronics. John Wiley & Sons, Inc, 2009.
- Magill J, Galy J. Radioactivity Radionuclides Radiation. Springer Berlin, Heidelberg, New York, 2005.
- Martin B R. Nuclear and Particle Physics. John Wiley & Sons Ltd, The Atrium, Southern Gate, Chichester, 2006.
- Романцов ВП, Романцова ИВ, Ткаченко ВВ. Сборник задач по дозиметрии и защите от йонизирующих излучений. Обнинск, 2012.
- Stabin GM. Fundamentals of Nuclear Medicine Dosimetry. Springer Science Business Media, LLC, New York, 2008.
- Table of Radioactive Isotopes, <http://nucleardata.nuclear.lu.se/toi/perchart.htm>.
- Tack D, Gevenois PA (Eds.). Radiation Dose from Adult and Pediatric Multidetector Computed Tomography. Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2007.
- Turner EJ. Atoms, Radiation and radiation protection. Third, Completely revised and Enlarged Edition, Wiley-VCH Verlag GmbH&Co. KGaA, Weinheim, 2007.

UNSCEAR: United Nations Scientific Committee on the Effects of Atomic Radiation, Sources and effects of ionizing radiation. Report to the General Assembly with Scientific Annexes. Volume I; United Nations, New York, 2008.

X-5 Monte Carlo Team. MCNP—a General Monte Carlo N-Particle Transport Code, Version 5 Vol. I: Overview and Theory Los Alamos, NM: Los Alamos National Laboratory, 2003.

Званцев АА, Климанов ВА, Ксенофонтов АИ, Могиленец НН, Панин МП, Смирнов ВВ. Сборник задач по теории переноса, дозиметрии защите от йонизирующих излучений, Москва 2011.